< 29번 문항의 출제의도 >

문제에서 $\overrightarrow{OP}$와 $\overrightarrow{OQ}$가 수직이라고 했으므로 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0$를 이용할 것을 먼저 검토하는 것이 좋다. 일단 문제접근의 방향을 이렇게 결정하면 관건은 $\overrightarrow{OP}$와 $\overrightarrow{OQ}$의 내적연산을 '간단'하게 할 방법이 관건이 될 것이다.

여기서 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0$조건을 만족하는 Q점이 하나가 아니라 점 O를 지나고 $\overrightarrow{OP}$를 법선벡터로 하는 평면 위의 모든 점이라는 것이며, 동시에 평면 BCD위의 점이므로 평면과 평면의 위치관계를 생각하여 두 평면의 교선위에 있음을 알아야 한다.

그런데 문제가 요구하는 것은 Q점의 자취가 아니라 $|\overrightarrow{PQ}|$의 최댓값이므로 세 가지의 선택이 가능하게 된다.

첫 번째는 주어진 공간도형의 상황을 두 개 이상의 평면도형의 상황으로 분해하여 기하학적인 접근을 하는 방법이고 두 번째는 공간에서의 평면의 방정식을 이용하여 교선의 방정식을 구하고, $|\overrightarrow{PQ}|$를 식으로 표현한 다음에 최댓값을 구하는 방법이다. 그런데 이 두 가지 방법은 복잡한 계산을 요구할 수 밖에 없다.

끝으로 $|\overrightarrow{PQ}|$가 최대가 되는 Q점의 위치를 기하학적으로 결정하고 나서 최댓값을 구하는 방법인데 이 방법이 가장 간단하게 문제를 해결할 수 있음을 판단할 수 있어야 한다. 그리고 시험을 볼 때 이런 판단이 가능하려면 평소에 문제를 해결함에 있어서 가능한 여러 방법으로 문제를 해결하는 것이 필수적이다.

이제 먼저 교선을 결정해야 하는데, 이는 어렵지 않다. 다음으로 $|\overrightarrow{PQ}|$가 최대가 는 점Q의 위치를 결정해야 하는데, 이 점의 위치가 선분 CD (선분 BD는 마찬가지)위에 있다는 것까지는 어렵지 않다. 문제는 CD위의 어느 위치에 Q점이 존재하는가를 밝히는 것이다.

평가원은 언제나 교과과정의 가장 기본적인 개념을 요구한다. 특히 난이도가 높은 문제일수록 '종합적 사고력'을 평가하는 문항이기 때문에 더욱 그렇다. 따라서 문제의 핵심을 교과서의 기본개념으로 표현하면, '***직선위의 점을 어떻게 표현할 수 있는가?***'라는 점이다.

직선을 표현하는 방법은 좌표를 이용하여 표현하는 방법과 벡터방정식을 이용하여 표현하는 방법이 존재한다. 그런데 문제에서 제시된 상황을 좌표를 이용하여 표현하려면 '원점의 위치를 직선위의 점으로 설정할 수 없는 이상 어떻게 설정하여도' 무리수를 포함하게 될 가능성이 높다. 따라서 이런 방향으로 접근하겠다고 생각할 경우는 '계산의 복잡성'을 감내할 용기를 가져야 한다. 그리고 일반적으로는 '당연히' 벡터방정식을 이용하여 표현하겠다고 생각하는 것이 자연스러운 것이다.

뿐만 아니라 평가원은 여기에서 문제 해결의 결정적인 힌트를 제공하고 있다. 그것은 삼각형 ABC의 무게중심을 일반적으로 무게중심을 의미하는 문자 G를 사용하지 않고, 원점을 의미하는

O로 제시하고 있다는 점이다. 기출문제를 조금만 주의 깊게 학습한 경우라면 평가원은 문자 하나의 표현도 허투루 하지 않는다는 것을 알 수 있었을 것이다. 반대로 말하면 이 문제에서 무게중심이 O로 표현된 것에 주목하지 못했다면 1등급을 목표로 하는 관점에서는 기출문제를 헛공부한 것이나 다름없다.

이상을 종합하면 주어진 문제에 대한 가장 간결한 문제해결전략이 결정된다.

- 직선 CD위의 임의의 점을 실수 t를 이용하여 표현한다.
- 문제에서 주어진 조건 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0$를 이용하여 Q점의 위치를 결정한다.
- $|\overrightarrow{PQ}|$의 값을 계산한다.

특히 정사면체의 꼭지점 D에서 삼각형 ABC에 내린 수선의 발이 삼각형 ABC의 무게중심이고, 내적연산에 필요한 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$ 역시 삼각형 ABC가 정삼각형이므로 간단하게 구할 수 있음을 고려하면 전체의 계산과정도 29번 문항 수준에서는 ‘간단’한 것임도 어렵지 않게 짐작할 수 있다.

따라서 1등급 이상을 목표로 한다면 출제의도를 이러한 수준으로 파악하는 훈련을 기출문제를 통하여 반복하는 것이 중요하며, 더 나아가서 시험을 볼 때 출제의도를 완벽하게 읽어내는 것이 힘들 경우에 ‘문제를 어떻게든 맞힐 수 있는 방법’으로 ‘계산능력’으로 문제를 해결하는 것까지 훈련하면 금상첨화일 것이다. 유념할 것은 언제나 전자가 먼저 학습되어야 한다는 점이다. 후자의 훈련은 그것을 바탕으로 이루어지는 것이지, 전자를 대체할 수 있는 것은 아니기 때문이다.

< 30번 문항의 출제의도 >

30번 문항은 역대급의 난이도 문항으로 평가되고 있고, 실제 결과도 그런 것으로 나타나고 있다. 수험생이 이 문항에서 멘붕을 경험했다는 것은 결과로 나타나고 있지만 출제의도를 생각해 본다면 평가원도 멘붕을 경험하고 있을 것으로 보인다. 만약에 시험 전에 출제위원들에게 '예상 정답율'을 물어보았다면 아마도 실제 결과와는 매우 차이를 보였을 것 같다.

먼저 중요한 것은 30번 문항과 같이 조건을 여러 가지 제시하는 경우의 기본적인 접근방법이다. 평가원은 조건을 여러 가지 제시할 경우에 그 조건을 순차적으로 검토할 것을 요구한다. 예를 들어 20번 문항을 해결함에 있어서 ㄱ), ㄴ), ㄷ)에서 제시되는 명제의 판단을 순차적으로 해 나가지 않고 판단하려고 하면 혼선이 불가피할 뿐 아니라 스스로 체감난이도를 높이는 것과 다름없다.

(가)의 조건은 함수 $g(x)$를 $f(x)$를 이용하여 정의하고 있다. 경우에 따라서 (가)의 조건을 함수 $g(x)$를 이용하여 $f(x)$를 정의하고 있는 것으로 파악할 수 있으나, 이렇게 할 경우에는 당연히 문제의 핵심을 파악함에 혼란을 겪을 수밖에 없다. 결과적으로 나타나는 정답율을 보면 대다수의 학생이 평가원이 제시한 식을 우선 있는 그대로 해석하지 않고, 변형하여 $f(x)=\dfrac{g(x)}{x-a}$로 해석하여 문제를 접근하려고 했을 것으로 보인다. (이렇게 접근하면 계산과정의 복잡성도 증가하고, 추론과정도 매우 복잡하게 될 수밖에 없다.)

(가)의 조건은 함수 $g(x)$를 정의한 것이므로 이를 파악하고 (나)의 조건으로 넘어가면, 이제 함수 $f(x)$에 대하여 주어진 정보를 바탕으로 하여, 함수 $g(x)$를 추론하라는 것임을 어렵지 않게 파악할 수 있다. (나)에서 주어진 조건은 $f(\alpha)=f(\beta)=M$, $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$이므로 (가)에 주어진 식과 (나) 조건을 이용하면 $g'(\alpha)=g'(\beta)=M$임을 쉽게 구할 수 있다.

함수 $g(x)$가 사차함수라는 조건이 주어졌으므로 $g'(x)$가 삼차함수임을 알 수 있고, 이제 이 조건을 이용하여 함수 $g'(x)$에 대한 정보를 얻어야 한다. 서로 다른 실수 α,β에 대하여 $g'(\alpha)=g'(\beta)$가 되어야 하므로 $g'(x)$의 개형은 쉽게 추론할 수 있다. 이제 남은 것은 그 값이 M이라는 조건, 즉 $g'(\alpha)=g'(\beta)=M$이다. 이 조건의 의미는 $y=M$의 위치는 결정되어 있다는 것이다.

교과과정에 의하면 이 식의 의미는 $(\alpha, g(\alpha)),(\beta,g(\beta))$에서의 접선의 기울기가 M이라는 것을 의미하며, 따라서 $M=\dfrac{g(\beta)-g(\alpha)}{\beta-\alpha}$이다. 사실 여기서도 평가원은 굳이 문자 M을 사용하여 출제의도를 드러내고 있기는 하지만, 이것을 읽어내지 못했다고 해도 이 해석에 무리는 없었을 것이다.

$g'(x)$와 $g(x)$의 관계를 위해서는 두 가지의 선택이 존재하는데, $g(x)$를 가정하고 이를 미분하여 도함수를 얻는 방법과 반대로 $g'(x)$를 가정하고 이를 적분하여 $g(x)$를 얻는 방법이 있다. 그런데 문제에서 주어진 함수가 다항함수이며, 이미 $g'(x)$의 개형을 파악한 상태에서는 후자의

방법이 당연히 간단한 것임도 쉽게 파악할 수 있다.

그리고 (나) 조건의 해석에서 필요한 이와 같은 요소는 이미 기출문제에서 반복하여 출제되었던 내용이기도 하다. 따라서 평가원은 (나) 조건의 해석은 어려운 부분이 있다고 해도, 실제 결과로 나타나는 수준만큼 '역대급'으로 어려울 것이라고 생각하지 않았을 것이다.

(나) 조건을 해석하면 이제 접근방법에 따라서 두 가지 중의 하나를 얻는다.

(1) $g'(x)-M=-4(x-\alpha)(x-\frac{\alpha+\beta}{2})(x-\beta)$

(2) $g(x)-(Mx+k)=-(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$

참고로 (1)번의 방법으로 해결하는 것이 계산이 가장 간단하며, (2)의 방법으로도 30번을 감안하면 크게 복잡하지 않은 계산으로 문제를 해결할 수 있다. 그리고 (2)의 방법에서 $(\alpha, g(\alpha)), (\beta, g(\beta))$에서의 공통접선에서 중요한 정보는 기울기가 M이라는 것이며, 곡선위의 점이 아닌 다른 점, 예를 들면 $(a, 0)$을 지난다는 것은 전혀 중요하지 않다.

이제 (다)의 조건을 해석하면 (나)의 조건에서 역시 함수 $f(x)$의 극점에 대한 정보가 주어졌으므로 함수 $g(x)$의 극점에 대한 정보를 얻을 수 있고, 이를 이용하면 $y=g'(x)$에서의 x축의 위치를 결정할 수 있다.

$g'(x)$의 개형에 대한 모든 추론이 끝났으므로 이제 $g''(x)$를 이용하여 문제가 요구하는 M의 최솟값을 구하면 되는데 이른 '간단한' 계산에 불과하다.

결과적으로 체감난이도가 역대급 이었다는 것은 아마도 많은 학생이 (가) 조건을 굳이 변형하여 $f(x)=\frac{g(x)}{x-a}$라는 식을 얻고, 이를 '해석'하여 함수 $f(x)$가 점 $(a, 0)$과 $(x, f(x))$를 지나는 직선의 기울기를 나타내는 함수로 파악하고, 이 기울기의 변화를 관찰하여 문제를 접근하려고 했기 때문일 것으로 판단된다.

평가원은 나름대로 정답율을 높이기 위한 목적으로 이렇게 접근할 경우에도 답을 맞히는 것이 가능하도록 배려는 하고 있다. 다만 이 경우에는 (나) 조건의 해석을 위한 미분법도 몫의 미분법을 이용해야 할 뿐 아니라 (다) 조건의 해석은 기울기의 변화를 관찰하여 $f(x)$의 극값에 대한 판단을 사차함수 $g(x)$의 여러 가능한 개형에 대하여 판단해야 하는 등의 복잡함과 어려움이 증가할 수밖에 없다. 그리고 엄밀히 말하면 이것은 교과과정의 취지와 학습목표에도 적합하지 않은 것이기도 하다.

교과과정에 의하면 '기울기'는 두 점을 이은 직선의 기울기와 미분계수의 기하학적 의미로 접선의 기울기를 파악하는 것까지이며, '기울기의 변화'는 당연히 '계산'해야 하는 것이다. 직관적으로는 명백한 평균값의 정리까지도 이런 의미에서 '계산'을 통하여 증명해야 하는 것이 교과과정의 취지인 것이며, 이계도함수를 이용하여 곡선의 오목과 볼록을 판정하는 것도 그러한 이유이다.

이상을 종합하면 난이도가 높은 문항일수록 출제의도를 정확하게 읽어내기 위해서는 교과과정에 대한 정확한 이해가 필요하며, 기출문제도 이런 관점에서 출제의도를 정확하게 파악하는 학습을 할 수 있어야 한다. 기출문제를 맞히는 것만 주력하여 학습을 하거나, 또는 왜곡된 방법으로 해석하여 공부를 한다면 이런 수준의 문항은 해결할 길이 없다고 해도 과언은 아니다.

나아가서 이 문항의 경우에도 설령 엉뚱한 방향으로 (예를 들면 $f(x)=\dfrac{g(x)}{x-a}$라고 해석하는 것과 같이) 문제를 접근했다고 해도 가능하면 정답을 맞힐 수 있도록 고려하여 출제하고 있음을 감안하면 추론과 계산과정이 다소 복잡해진다고 해도 만점을 목표로 하는 만큼 어떻게든 해결해 보는 노력도 필요하긴 할 것이다. 다만 29번 문항과 마찬가지로 적어도 학습의 중점과 우선순위가 어디에 있는가는 유념해야 한다. 짐작하기에 평가원이 예상한 정답율과 결과가 큰 차이를 보이는 것은 대다수의 상위권 수험생의 학습의 방향과 방법이 잘못되고 있음을 뜻하는 것으로 판단된다.