제 2 교시

수학 영역

KSM

홀수형

5지선다형

1. $\sqrt[3]{5} \times 25^{\frac{1}{3}}$ 의 값은? [2점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

2. 함수 $f(x) = x^3 - 8x + 7$에 대하여 $\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ 의 값은? [2점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

$f'(x) = 3x^2 - 8$

$f'(2) = 12 - 8 = 4$

3. 첫째항과 공비가 모두 양수 k인 등비수열 $\{a_n\}$이

$$\frac{a_4}{a_2} + \frac{a_2}{a_1} = 30$$

을 만족시킬 때, k의 값은? [3점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

$r^2 + r = 30$

$(r+6)(r-5) = 0$

$r = 5 \ (\because r > 0)$

4. 함수

$$f(x) = \begin{cases} 5x + a & (x < -2) \\ x^2 - a & (x \geq -2) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

$-10 + a = 4 - a$

$a = 7$

5. 함수 $f(x)=(x^2+1)(3x^2-x)$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [3점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

$f'(x)=2x(3x^2-x)+(x^2+1)(6x-1)$

$f'(1)=4+10=14$

6. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\frac{1}{5}$일 때, $\frac{\sin\theta}{1-\cos^2\theta}$의 값은? [3점]

① -5 ② $-\sqrt{5}$ ③ 0 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ 5

$-\sin\theta=-\frac{1}{5}$

$\sin\theta=\frac{1}{5}$

$\frac{\sin\theta}{\sin^2\theta}=\frac{1}{\sin\theta}=5$

7. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_0^x f(t)\,dt=3x^3+2x$$

를 만족시킬 때, $f(1)$의 값은? [3점]

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

$f(x)=9x^2+2$

$f(1)=11$

8. 두 실수 $a = 2\log\frac{1}{\sqrt{10}} + \log_2 20$, $b = \log 2$에 대하여 $a \times b$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$a = -1 + 1 + \log_2 10 = \log_2 10$

$b = \log_{10} 2$

$ab = 1$

9. 함수 $f(x) = 3x^2 - 16x - 20$에 대하여

$$\int_{-2}^{a} f(x)\,dx = \int_{-2}^{0} f(x)\,dx$$

일 때, 양수 a의 값은? [4점]

① 16 ② 14 ③ 12 ④ 10 ⑤ 8

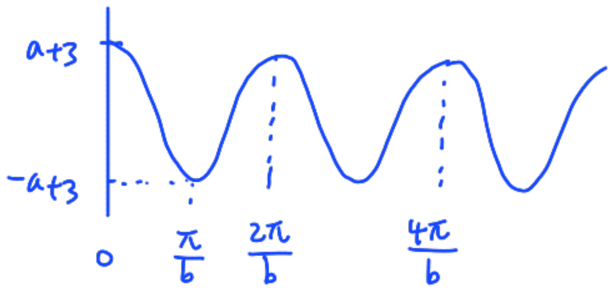
$\int_{-2}^{a} f + \int_{0}^{-2} f = \int_{0}^{a} f = 0$

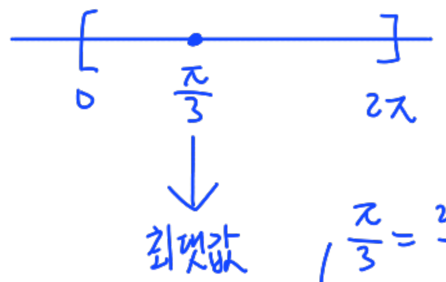
$x^3 - 8x^2 - 20x \Big|_0^a = a(a+2)(a-10) = 0$

$a = 10$ $(\because a > 0)$

10. 닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 정의된 함수 $f(x) = a\cos bx + 3$이 $x = \frac{\pi}{3}$에서 최댓값 13을 갖도록 하는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a + b$의 최솟값은? [4점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20





$\frac{\pi}{3} = \frac{2n\pi}{b}$

$13 = a+3$, $a = 10$

$b = 6n$

$a+b$ 최솟값

$b = 6$, $a = 10$

$a+b = 16$

11. 시각 $t=0$일 때 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 위치 x가

$$x = t^3 - \frac{3}{2}t^2 - 6t$$

이다. 출발한 후 점 P의 운동 방향이 바뀌는 시각에서의 점 P의 가속도는? [4점]

① 6 ② 9 ③ 12 ④ 15 ⑤ 18

$v(t) = 3t^2 - 3t - 6$

$= 3(t-2)(t+1)$ $t=2$

$a(t) = 6t - 3$

$a(2) = 12 - 3 = 9$

12. $a_1 = 2$인 수열 $\{a_n\}$과 $b_1 = 2$인 등차수열 $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_{k+1}} = \frac{1}{2}n^2$$

을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{5} a_k$의 값은? [4점]

① 120 ② 125 ③ 130 ④ 135 ⑤ 140

$\frac{a_n}{b_{n+1}} = n - \frac{1}{2}$, $a_n = (n-\frac{1}{2})b_{n+1}$

$a_1 = \frac{1}{2}b_2$, $b_2 = 4$

$b_1 = 2$

$b_n = 2n$, $b_{n+1} = 2(n+1)$

$\therefore a_n = (2n-1)(n+1) = 2n^2 + n - 1$

$\sum_{k=1}^{5} a_k = \sum_{k=1}^{5}(2k^2 + k - 1)$

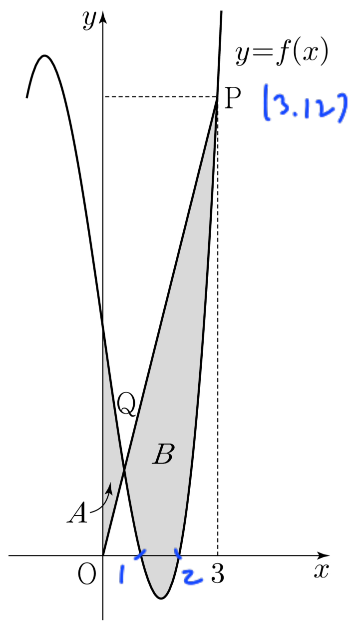
$= 2 \cdot \frac{5 \cdot 6 \cdot 11}{6} + \frac{5 \cdot 6}{2} - 5 = 120$

13. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가

$$f(1)=f(2)=0,\quad f'(0)=-7$$

을 만족시킨다. 원점 O와 점 $\mathrm{P}(3,\ f(3))$에 대하여 선분 OP가 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 y축 및 선분 OQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 곡선 $y=f(x)$와 선분 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 할 때, $B-A$의 값은? [4점]

① $\frac{37}{4}$ ② $\frac{39}{4}$ ③ $\frac{41}{4}$ ④ $\frac{43}{4}$ ⑤ $\frac{45}{4}$



$f(x)=(x-1)(x-2)(x+k)$ x^3-7x+6

$f'(0)=2-k-2k=-7,\ k=3$ $f(3)=12$

$\overleftrightarrow{OP}: y=4x$

$B-A=\int_0^3 |4x-f(x)|dx=\int_0^3(-x^3+11x-6)dx$

$=-\frac{81}{4}+\frac{99}{2}-18=\frac{198-153}{4}$

$=\frac{45}{4}$

14. 그림과 같이 삼각형 ABC에서 선분 AB 위에 $\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{DB}}=3:2$인 점 D를 잡고, 점 A를 중심으로 하고 점 D를 지나는 원을 O, 원 O와 선분 AC가 만나는 점을 E라 하자.
$\sin A:\sin C=8:5$이고, 삼각형 ADE와 삼각형 ABC의 넓이의 비가 $9:35$이다. 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 7일 때, 원 O 위의 점 P에 대하여 삼각형 PBC의 넓이의 최댓값은? (단, $\overline{\mathrm{AB}}<\overline{\mathrm{AC}}$) [4점]

$BC:AB=8:5$

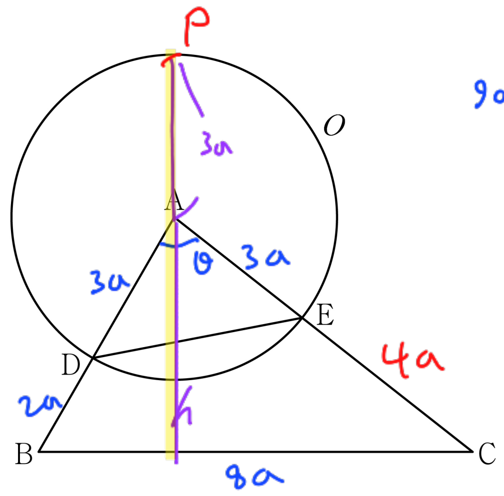
$BC=8a$

$AC=x$

$9a^2:5ax=9:35$

$\frac{5x}{a}=35$

$x=7a,\ CE=4a$



① $18+15\sqrt{3}$ ② $24+20\sqrt{3}$ ③ $30+25\sqrt{3}$
④ $36+30\sqrt{3}$ ⑤ $42+35\sqrt{3}$

$\cos\theta=\frac{25+49-64}{2\cdot5\cdot7}=\frac{10}{70}=\frac{1}{7},\ \sin\theta=\frac{4\sqrt{3}}{7}$

$\triangle ABC\rightarrow \frac{8a}{\sin\theta}=14,\quad a=\frac{7}{4}\cdot\frac{4\sqrt{3}}{7}=\sqrt{3}$

$\triangle ABC\rightarrow \frac{1}{2}\cdot5a\cdot7a\cdot\sin\theta=\frac{1}{2}\cdot8a\cdot h$

$h=\frac{35a}{8}\sin\theta=\frac{35}{8}\sqrt{3}\cdot\frac{4\sqrt{3}}{7}=\frac{15}{2}$

$\triangle PBC$ 넓이 최댓값 $\frac{1}{2}\times8a\times(h+3a)$

$=4\sqrt{3}\left(\frac{15}{2}+3\sqrt{3}\right)=36+30\sqrt{3}$

15. 상수 $a\,(a \neq 3\sqrt{5}\,)$와 최고차항의 계수가 음수인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} x^3+ax^2+15x+7 & (x \le 0) \\ f(x) & (x>0) \end{cases}$$

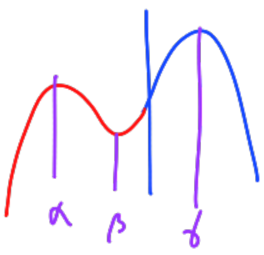
이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
> (나) x에 대한 방정식 $g'(x) \times g'(x-4)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

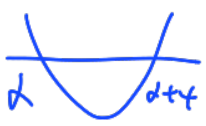
$g(-2)+g(2)$의 값은? [4점]

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

$7=f(0)$
$15=f'(0)$) $f(x)=px^2+15x+7$



$g'(x)=0$ α β γ
$g'(x-4)=0$ α+4 β+4 γ+4
$\beta-\alpha=4,\ \gamma-\beta=4$



$3x^2+2ax+15$
$\alpha(\alpha+4)=5$ $(\alpha+5)(\alpha-1)=0$
$\alpha+(\alpha+4)=-\frac{2a}{3}$ $\alpha=-5$ $-6=-\frac{2a}{3}$
$\beta=-1$
$\gamma=3$ $a=9$
$f'(3)=6p+15=0,\ p=-\frac{5}{2}$
$f(x)=-\frac{5}{2}x^2+15x+7$
$g(2)=-10+30+7=27$
$g(-2)=-8+36-30+7=5$) 32

단답형

16. 방정식

$$\log_2(x-3)=\log_4(3x-5)$$

를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

$x>3,\ (x-3)^2=3x-5$ $\boxed{7}$
$x^2-9x+14=0$
$(x-2)(x-7)=0$
$\therefore x=7\ (\because x>0)$

17. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=9x^2+4x$이고 $f(1)=6$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{33}$
$f(x)=3x^3+2x^2+1$
$f(2)=24+8+1=33$

18. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n + a_{n+4} = 12$$

를 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{16} a_n$의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{96}$

$a_1 + a_5 = 12$
$a_2 + a_6 = 12$
$a_3 + a_7 = 12$
$a_4 + a_8 = 12$
48

$\sum_{1}^{8} a_n + \sum_{9}^{16} a_n$

$= 48 + 48 = 96$

19. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x) = 2x^3 - 3ax^2 - 12a^2x$$

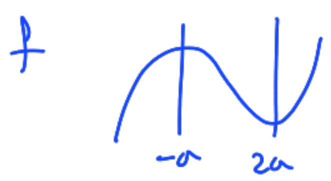
라 하자. 함수 $f(x)$의 극댓값이 $\frac{7}{27}$일 때, $f(3)$의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{41}$

$f'(x) = 6x^2 - 6ax - 12a^2$

$= 6(x-2a)(x+a)$

f



$f(-a) = -2a^3 - 3a^3 + 12a^3 = 7a^3 = \frac{7}{27}$, $a = \frac{1}{3}$

$f(x) = 2x^3 - x^2 - \frac{4}{3}x$

$f(3) = 54 - 9 - 4 = 41$

20. 곡선 $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$과 직선 $y = x$가 만나는 점의 x좌표를 k라 하자. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> $x > k$인 모든 실수 x에 대하여
>
> $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$이고 $f(f(x)) = 3x$이다.

$f\left(\frac{1}{k^3 \times 5^{3k}}\right)$의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{36}$

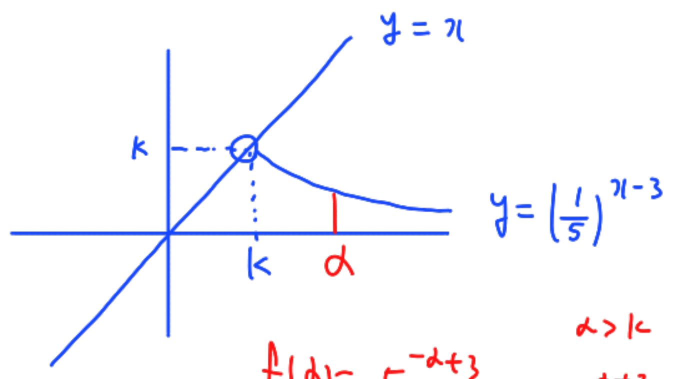
$f(5^{-9})$

$\left(\frac{1}{5}\right)^{k-3} = k$
$k \cdot 5^k = 5^3$
$k^3 \cdot 5^{3k} = 5^9$

$\left(\frac{1}{5}\right)^{k-3} = k$

5 2
1 3

$2 < k < 3$



$f(\alpha) = 5^{-\alpha+3}$

$\alpha > k$

$5^{-\alpha+3} < k$

$\alpha > k \rightarrow f(f(\alpha)) = 3\alpha$

$f(5^{-\alpha+3}) = 3\alpha$

$\alpha = 12 \rightarrow f(5^{-9}) = 36$

$2 < k < 3$

21. 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+4$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 두 정수 a, b에 대하여 $f(1)$의 최댓값을 구하시오. [4점] $\boxed{16}$

> 모든 실수 α에 대하여 $\lim_{x\to\alpha}\frac{f(2x+1)}{f(x)}$의 값이 존재한다.

$f(\alpha)=0 \to f(2\alpha+1)=0 \to f(4\alpha+2)=0 \to f(8\alpha+3)=0 \to \cdots$

$f(x)$는 3차함수 $\therefore \alpha=2\alpha+1 \quad \alpha=-1$

$f(x)=(x+1)(x^2+px+4)$

$(x+1)^2$ or $D<0$

$\cancel{x^2+px+4}$

$\therefore p^2-16<0 \quad -4<p<4$

$x^3+(p+1)x^2+(p+4)+4 \qquad a=p+1$

$b=p+4$

a&b 정수 → p: 정수

$f(1)=2(p+5)$ 최댓값

$p=3 \to 16$

22. 모든 항이 정수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $|a_1|$의 값의 합을 구하시오. [4점] $\boxed{64}$

> (가) 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$a_{n+1}=\begin{cases} a_n-3 & (|a_n|\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n=0 \text{ 또는 } |a_n|\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$
>
> 이다.
>
> (나) $|a_m|=|a_{m+2}|$인 자연수 m의 최솟값은 3이다.

$|a_3|=|a_5|$ / $|a_1|\neq|a_3|$, $|a_2|\neq|a_4|$

$a_3 \quad a_4 \quad a_5$

$\alpha \to \alpha-3 \to \alpha-6$ (X)

$\alpha \to \alpha-3 \to \frac{\alpha-3}{2} \Rightarrow \alpha=-3/1$

$\alpha \to \frac{\alpha}{2} \to \frac{\alpha}{2}-3 \Rightarrow \alpha=-6/2$

$\alpha \to \frac{\alpha}{2} \to \frac{\alpha}{4} \Rightarrow \alpha=0$

$$a_n=\begin{cases} a_{n+1}+3 & (|a_n|\text{:홀수}) \\ 2a_{n+1} & (|a_n|\text{:짝수}) \end{cases}$$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
	-6	-3	-6	-3
	2	1	-2	-1
-9, -24	-3, -12	-6	-3	-6
10	5	2	1	-2
7, 8	4			
6	3	0	0	0

⇓

$|-9|+|-24|+10+7+8+6=64$

> ＊ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, **「선택과목(확률과 통계)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

홀수형

5지선다형

23. 다항식 $(x^3+2)^5$의 전개식에서 x^6의 계수는? [2점]

① 40 ② 50 ③ 60 ④ 70 ⑤ 80

$_5C_2 \times 2^3 = 80$

24. 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}, \quad \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{5}$$

일 때, $\mathrm{P}(A\cup B)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{7}{10}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{9}{10}$

$\frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{1}{2}$

$P(B) = 2P(A\cap B) = \frac{2}{5}$

$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

$= \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5} = \frac{7}{10}$

25. 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 2^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 256인 표본을 임의추출하여 얻은 표본평균을 이용하여 구한 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $a \le m \le b$이다. $b-a$의 값은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96) = 0.95$로 계산한다.) [3점]

① 0.49 ② 0.52 ③ 0.55 ④ 0.58 ⑤ 0.61

$2 \times 1.96 \times \frac{2}{\sqrt{256}} = \frac{1.96}{4} = 0.49$

26. 어느 학급의 학생 16명을 대상으로 과목 A와 과목 B에 대한 선호도를 조사하였다. 이 조사에 참여한 학생은 과목 A와 과목 B 중 하나를 선택하였고, 과목 A를 선택한 학생은 9명, 과목 B를 선택한 학생은 7명이다. 이 조사에 참여한 학생 16명 중에서 임의로 3명을 선택할 때, 선택한 3명의 학생 중에서 적어도 한 명이 과목 B를 선택한 학생일 확률은? [3점]

① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{4}{5}$ ③ $\frac{17}{20}$ ④ $\frac{9}{10}$ ⑤ $\frac{19}{20}$

$1 - \frac{{}_9C_3}{{}_{16}C_3} = 1 - \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{16 \cdot 15 \cdot 14} = 1 - \frac{3}{20} = \frac{17}{20}$

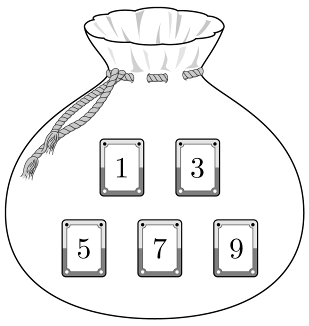
27. 숫자 1, 3, 5, 7, 9가 각각 하나씩 적혀 있는 5장의 카드가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 1장의 카드를 꺼내어 카드에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는 시행을 한다. 이 시행을 3번 반복하여 확인한 세 개의 수의 평균을 $\overline{X}$라 하자. $\mathrm{V}(a\overline{X}+6)=24$일 때, 양수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$E(X) = 5$

$V(X) = \dfrac{16+4+0+4+16}{5} = 8$

$V(\overline{X}) = \dfrac{8}{3}$



$a^2 V(\overline{X}) = 24$

$a^2 \times \dfrac{8}{3} = 24,\ a^2 = 9,\ a = 3$

28. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \to X$의 개수는? [4점]

(가) $f(1) \times f(6)$의 값이 6의 약수이다. 1, 2, 3, 6
(나) $2f(1) \le f(2) \le f(3) \le f(4) \le f(5) \le 2f(6)$

① 166 ② 171 ③ 176 ④ 181 ⑤ 186

$1 \le f(1) \le 3$

$f(1)$	$f(6)$		
1	1	$\rightarrow$	1
1	2	$\rightarrow$	${}_3H_4 = 15$
1	3	$\rightarrow$	${}_5H_4 = 70$
1	6	$\rightarrow$	${}_5H_4 = 70$
2	3	$\rightarrow$	${}_3H_4 = 15$

171

단답형

29. 정규분포 $\mathrm{N}\left(m_1,\ \sigma_1^2\right)$을 따르는 확률변수 X와 정규분포 $\mathrm{N}\left(m_2,\ \sigma_2^2\right)$을 따르는 확률변수 Y가 다음 조건을 만족시킨다.

> 모든 실수 x에 대하여
> $\mathrm{P}(X \le x) = \mathrm{P}(X \ge 40 - x)$이고 $m_1 = 20$
> $\mathrm{P}(Y \le x) = \mathrm{P}(X \le x + 10)$이다. $m_2 = 10$
> $\sigma_1 = \sigma_2$

$\mathrm{P}(15 \le X \le 20) + \mathrm{P}(15 \le Y \le 20)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것이 0.4772일 때, $m_1 + \sigma_2$의 값을 구하시오. (단, σ_1과 σ_2는 양수이다.) [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

$\boxed{25}$

$\mathrm{P}\left(\frac{-5}{\sigma_1} \le Z \le 0\right) + \mathrm{P}\left(\frac{5}{\sigma_1} \le Z \le \frac{10}{\sigma_1}\right)$

$= \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{10}{\sigma_1}\right) = 0.4772,\quad \frac{10}{\sigma_1} = 2,\ \sigma_1 = 5 = \sigma_2$

$\therefore m_1 + \sigma_2 = 20 + 5 = 25$

30. 탁자 위에 5개의 동전이 일렬로 놓여 있다. 이 5개의 동전 중 1번째 자리와 2번째 자리의 동전은 앞면이 보이도록 놓여 있고, 나머지 자리의 3개의 동전은 뒷면이 보이도록 놓여 있다. 이 5개의 동전과 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 k일 때,
> $k \le 5$이면 k번째 자리의 동전을 한 번 뒤집어 제자리에 놓고,
> $k = 6$이면 모든 동전을 한 번씩 뒤집어 제자리에 놓는다.

위의 시행을 3번 반복한 후 이 5개의 동전이 모두 앞면이 보이도록 놓여 있을 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p + q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$\boxed{19}$

$3\ 4\ 5 \rightarrow 3! \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{36}$

$1\ 2\ 6 \rightarrow 3! \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{36}$

$\frac{1}{18} = \frac{q}{p}$

> ＊ 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
> ○ 이어서, **「선택과목(미적분)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

홀수형

5지선다형

23. $\lim_{x \to 0} \frac{3x^2}{\sin^2 x}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

24. $\int_0^{10} \frac{x+2}{x+1} dx$ 의 값은? [3점]

① $10+\ln 5$ ② $10+\ln 7$ ③ $10+2\ln 3$
④ $10+\ln 11$ ⑤ $10+\ln 13$

$\int_0^{10} \left(1+\frac{1}{x+1}\right)dx = \left[x+\ln|x+1|\right]_0^{10}$

$= 10+\ln 11$

25. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{n^2+3}=1$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{a_n{}^2+n}-a_n\right)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

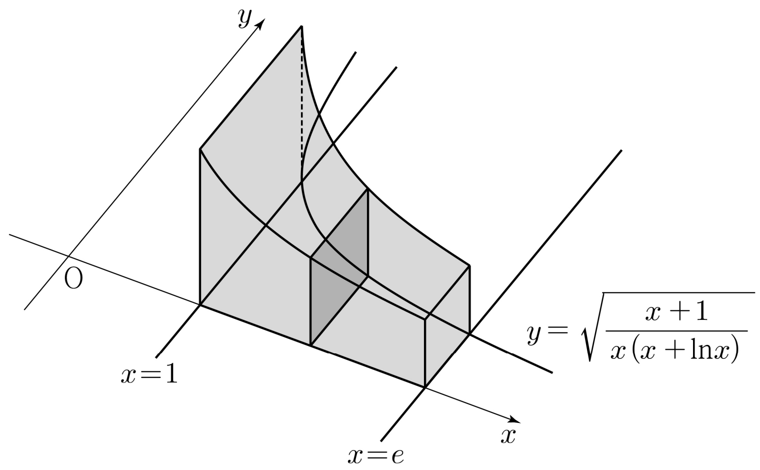
$\frac{na_n}{n^2+3}=b_n$, $a_n=\frac{n^2+3}{n}b_n$, $\lim b_n=1$

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=1$

$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{a_n^2+n}+a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{a_n^2}{n^2}+\frac{1}{n}}+\frac{a_n}{n}}$

$=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

26. 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{\frac{x+1}{x(x+\ln x)}}$과 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=e$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



① $\ln(e+1)$ ② $\ln(e+2)$ ③ $\ln(e+3)$
④ $\ln(2e+1)$ ⑤ $\ln(2e+2)$

$\int_1^e \frac{x+1}{x(x+\ln x)}dx$

$x+\ln x=t$

$\left(1+\frac{1}{x}\right)dx=dt$

$\frac{x+1}{x}dx=dt$

$\int_1^{e+1}\frac{1}{t}dt=\ln(e+1)$

27. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(e^x)+e^x$$

$g(0)=0$
$g'(0)=0$

이라 하자. 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(0,\ g(0))$에서의 접선이 x축이고 함수 $g(x)$가 역함수 $h(x)$를 가질 때, $h'(8)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{36}$ ② $\frac{1}{18}$ ③ $\frac{1}{12}$ ④ $\frac{1}{9}$ ⑤ $\frac{5}{36}$

$g'(x) = e^x f'(e^x) + e^x = e^x(f'(e^x)+1)$

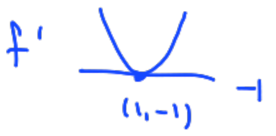
$g(0) = f(1)+1 = 0$, $f(1) = -1$

$g'(0) = f'(1)+1 = 0$, $f'(1) = -1$

f' ∪

$g'(x) = e^x(f'(e^x)+1) \geq 0$ (∵ g 역함수 존재)

$f'(e^x) \geq -1$ $e^x > 0$ $f(1)=-1$, $f'(1)=-1$



$f'(x) = 3(x-1)^2 - 1$

$f(x) = (x-1)^3 - x$ $(f(1)=-1)$

$g(x) = (e^x-1)^3 - e^x + e^x = (e^x-1)^3$, $g(\ln 3) = 8$, $h(8) = \ln 3$

$g'(x) = 3(e^x-1)^2 e^x$

$h'(8) = \frac{1}{g'(h(8))} = \frac{1}{g'(\ln 3)} = \frac{1}{36}$

28. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x)=-x+e^{1-x^2}$$

이다. 양수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선과 곡선 $y=f(x)$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(t)$라 하자. $g(1)+g'(1)$의 값은? [4점]

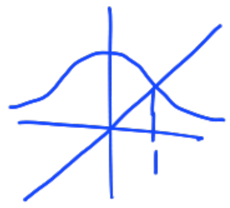
① $\frac{1}{2}e+\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{2}e+\frac{2}{3}$ ③ $\frac{1}{2}e+\frac{5}{6}$

④ $\frac{2}{3}e+\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{2}{3}e+\frac{2}{3}$

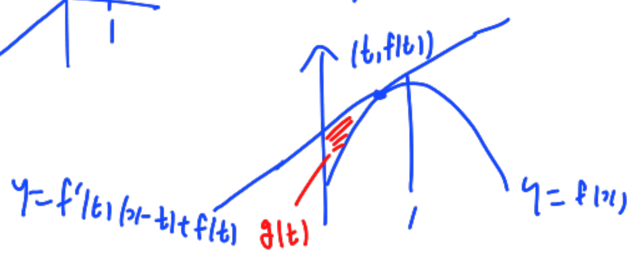
$f'' = -1 - 2xe^{1-x^2}$

$x>0 \to f''<0$

$e^{1-x^2} = x$



f' ⊕ 1 ⊖



$g(t) = \int_0^t \{f'(t)(x-t)+f(t) - f(x)\}dx$

$= \left[\frac{f'(t)}{2}x^2 - (tf'(t))x + (f(t))x\right]_0^t - \int_0^t f(x)dx$

$= -\frac{t^2}{2}f'(t) + tf(t) - \int_0^t f(x)dx$

$g'(t) = -t\cancel{f'(t)} - \frac{t^2}{2}f''(t) + \cancel{f(t)} + t\cancel{f'(t)} - \cancel{f(t)}$

$g'(t) = -\frac{t^2}{2}f''(t) = \frac{t^2}{2} + t^3e^{1-t^2}$

$g'(1) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

$g(1) = -\frac{1}{2}f'(1) + f(1) - \int_0^1 f(x)dx$

$= 0 + f(1) - [xf(x)]_0^1 + \int_0^1 xf'(x)dx$

$= \int_0^1 (-x^2 + xe^{1-x^2})dx$

$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \left(-\frac{1}{2}\right)e^{1-x^2}\right]_0^1 = \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}e\right)$

$= \frac{1}{2}e - \frac{5}{6}$

$\therefore g'(1) + g(1) = \frac{1}{2}e + \frac{2}{3}$

단답형

29. 등비수열 $\{a_n\}$이

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+a_n)=\frac{40}{3},\quad \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|-a_n)=\frac{20}{3}$$

을 만족시킨다. 부등식

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left((-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\times a_{m+k}\right)>\frac{1}{700}$$

을 만족시키는 모든 자연수 m의 값의 합을 구하시오. [4점]

$a_n = ar^{n-1}$ $\quad \sum_{1}^{\infty}|a_n| = 10,\ \sum_{1}^{\infty}a_n = \frac{10}{3}$ $\quad \boxed{25}$

$r<0$ $\quad \frac{a}{1-r}=\frac{10}{3}$ $\quad -1<r<1$

$a>0,\ r<0$ $\quad \frac{a}{1+r}=10 \to \frac{1-r}{1+r}=3,\ r=-\frac{1}{2}$, $a=5$

$a<0,\ r<0$ $\quad \frac{-a}{1+r}=10 \to \frac{r-1}{1+r}=3,\ r=-2$ (x)

$\therefore a_n = 5(-\frac{1}{2})^{n-1}$

$(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \to -1,-1,1,1,-1,-1,1,1,\cdots$

$(-a_{m+1}-a_{m+2})+(a_{m+3}+a_{m+4})-a_{m+5}\cdots$

$= \left(\underbrace{-5(-\frac{1}{2})^{m}-5(-\frac{1}{2})^{m+1}}\right)+\left(5(-\frac{1}{2})^{m+2}+5(-\frac{1}{2})^{m+3}\right)+\cdots$

$-5(-\frac{1}{2})^{m}(\frac{1}{2})$ → 공비 $-\frac{1}{4}$

$=5(-\frac{1}{2})^{m+1}$

$\therefore \frac{5(-\frac{1}{2})^{m+1}}{1+\frac{1}{4}} > \frac{1}{700}$ $\quad (-\frac{1}{2})^{m+1} > \frac{1}{2800}$

$m=1,3,5,7,9$

$1+3+5+7+9=25$

30. 두 상수 $a\,(1\le a\le 2)$, b에 대하여 함수
$f(x)=\sin(ax+b+\sin x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(0)=0,\ f(2\pi)=2\pi a+b$
> (나) $f'(0)=f'(t)$인 양수 t의 최솟값은 4π이다.

함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극대인 α의 값 중 열린구간 $(0,\,4\pi)$에 속하는 모든 값의 집합을 A라 하자. 집합 A의 원소의 개수를 n, 집합 A의 원소 중 가장 작은 값을 α_1이라 하면, $n\alpha_1-ab=\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점] $\boxed{17}$

$f(0)=\sin b=0$

$f(2\pi)=\sin(2\pi a+b)=2\pi a+b$ $\quad \sin x = x \to x=0$

$\therefore 2\pi a+b=0,\ b=-2\pi a$

$\sin(-2\pi a)=0 \Rightarrow a=1,\frac{3}{2},2$

$f'(x)=(a+\cos x)\cos(ax+b+\sin x)$

$f'(0)=(a+1)\cos b$, $\quad f'(t)=(a+\cos t)\cos(at+b+\sin t)$

$f'(4\pi)=(a+1)\cos(4\pi a+b)$ $\quad f'(0)=f'(t)$ t 최소: 4π

$a=1 \to f'(0)=2\cos b,\ f'(t)=(1+\cos t)\cos(t+b+\sin t)$

$t=2\pi \to f'(0)=f'(t)$ (x)

$a=2 \to f'(0)=3\cos b,\ f'(t)=(2+\cos t)\cos(2t+b+\sin t)$

$t=2\pi \to f'(0)=f'(t)$ (x)

$\therefore a=\frac{3}{2},\ b=-3\pi$

$f'(x)=\underbrace{(\frac{3}{2}+\cos x)}_{+}\cos\overbrace{(\frac{3}{2}x-3\pi+\sin x)}^{A}$ $\quad \frac{3}{2}+\cos x>0$

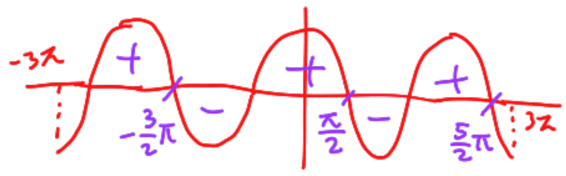
$\therefore \frac{3}{2}x-3\pi+\sin x$: 증가

$x=0\to -3\pi$

$x=4\pi \to 3\pi$

$0<x<4\pi$

$-3\pi<A<3\pi$



$n=3$

$A=-\frac{3}{2}\pi \to \frac{3}{2}x+\sin x=\frac{3}{2}\pi$

$x=\pi=\alpha_1$

$\therefore n\alpha_1-ab$

$=3\pi+\frac{9}{2}\pi=\frac{15}{2}\pi$

> * 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
> ○ 이어서, **「선택과목(기하)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

홀수형

5지선다형

23. 두 벡터 $\vec{a} = (k, 3)$, $\vec{b} = (1, 2)$에 대하여 $\vec{a} + 3\vec{b} = (6, 9)$일 때, k의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$k+3=6$

24. 꼭짓점의 좌표가 $(1, 0)$이고, 준선이 $x=-1$인 포물선이 점 $(3, a)$를 지날 때, 양수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$p=2$, $y^2 = 8(x-1)$

$(3, a) \to a^2 = 16$, $a=4$

25. 좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(a,\ b,\ 6)$, $\mathrm{B}(-4,\ -2,\ c)$에 대하여 선분 AB를 $3:2$로 내분하는 점이 z축 위에 있고, 선분 AB를 $3:2$로 외분하는 점이 xy평면 위에 있을 때, $a+b+c$의 값은? [3점]

① 11　　② 12　　③ 13　　④ 14　　⑤ 15

$\left(\dfrac{-12+2a}{5},\ \dfrac{-6+2b}{5},\ \right)$

$\dfrac{-12+2a}{5}=0$, $\dfrac{-6+2b}{5}=0$

$a=6,\ b=3$

$\left(\ ,\ ,\ \dfrac{3c-12}{3-2}\right)$

$\dfrac{3c-12}{3-2}=0$

$c=4$

$a+b+c=13$

26. 자연수 $n\,(n \geq 2)$에 대하여 직선 $x=\dfrac{1}{n}$이 두 타원

$$C_1 : \frac{x^2}{2}+y^2=1, \quad C_2 : 2x^2+\frac{y^2}{2}=1$$

과 만나는 제1사분면 위의 점을 각각 P, Q라 하자. 타원 C_1 위의 점 P에서의 접선의 x절편을 α, 타원 C_2 위의 점 Q에서의 접선의 x절편을 β라 할 때, $6 \leq \alpha-\beta \leq 15$가 되도록 하는 모든 n의 개수는? [3점]

① 7　　② 9　　③ 11　　④ 13　　⑤ 15

$\dfrac{x_1x}{2}+y_1y=1$

$x=\dfrac{2}{x_1}=2n=\alpha$

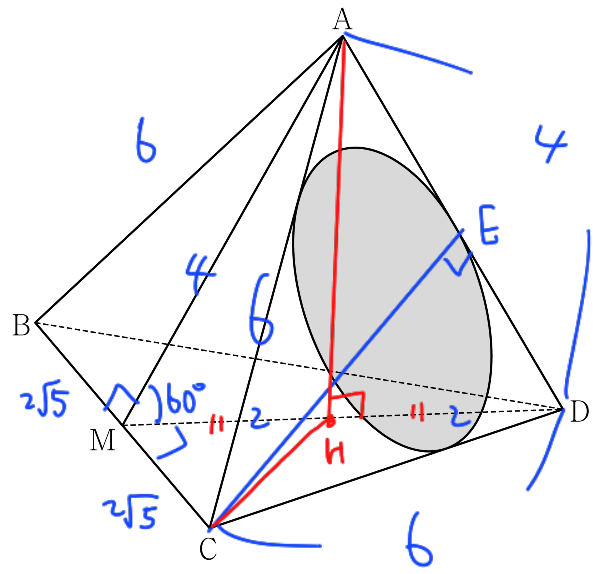
$2x_1x+\dfrac{y_1y}{2}=1$

$x=\dfrac{1}{2x_1}=\dfrac{n}{2}=\beta$

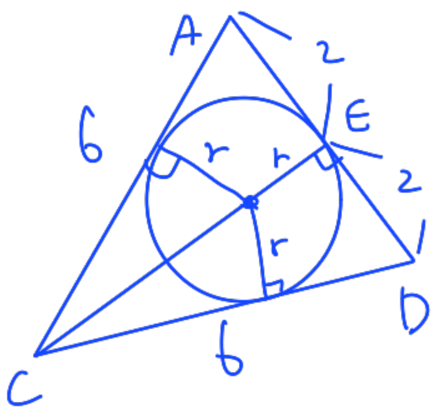
$6\leq \dfrac{3}{2}n \leq 15$, $4\leq n\leq 10$

7개

27. 그림과 같이 $\overline{AB}=6$, $\overline{BC}=4\sqrt{5}$ 인 사면체 ABCD에 대하여 선분 BC의 중점을 M이라 하자. 삼각형 AMD가 정삼각형이고 직선 BC는 평면 AMD와 수직일 때, 삼각형 ACD에 내접하는 원의 평면 BCD 위로의 정사영의 넓이는? [3점]



① $\frac{\sqrt{10}}{4}\pi$ ② $\frac{\sqrt{10}}{6}\pi$ ③ $\frac{\sqrt{10}}{8}\pi$
④ $\frac{\sqrt{10}}{10}\pi$ ⑤ $\frac{\sqrt{10}}{12}\pi$



$\overline{CE}=4\sqrt{2}$

$\frac{1}{2}r(6+6+4)=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\sqrt{2}$

$r=\sqrt{2}$

$\overline{AH}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 4=2\sqrt{3}$

$\triangle ACD\cos\theta=\triangle HCD=\frac{1}{2}\triangle MCD$

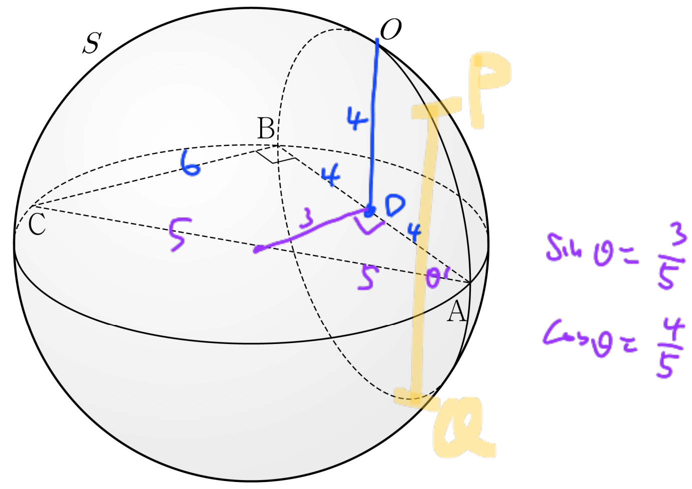
$8\sqrt{2}\cos\theta=2\sqrt{5}$

$\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{8}$

$\therefore S\cos\theta=2\pi\times\frac{\sqrt{10}}{8}=\frac{\sqrt{10}}{4}\pi$

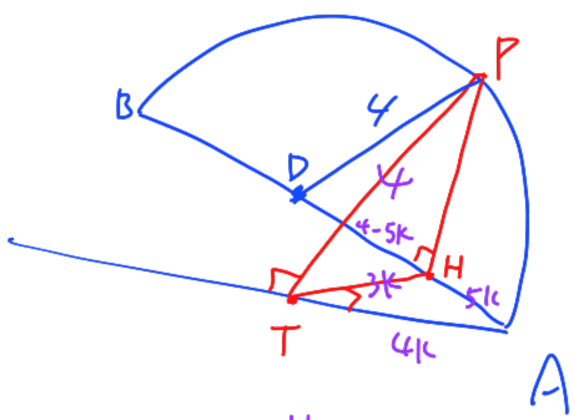
28. 좌표공간에 $\overline{AB}=8$, $\overline{BC}=6$, $\angle ABC=\frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형 ABC와 선분 AC를 지름으로 하는 구 S가 있다. 직선 AB를 포함하고 평면 ABC에 수직인 평면이 구 S와 만나서 생기는 원을 O라 하자. 원 O 위의 점 중에서 직선 AC까지의 거리가 4인 서로 다른 두 점을 P, Q라 할 때, 선분 PQ의 길이는? [4점]

① $\sqrt{43}$ ② $\sqrt{47}$ ③ $\sqrt{51}$ ④ $\sqrt{55}$ ⑤ $\sqrt{59}$



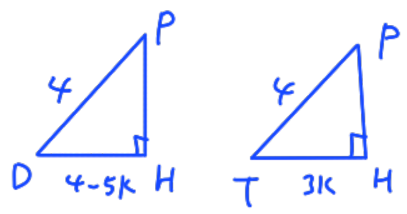
$\sin\theta=\frac{3}{5}$

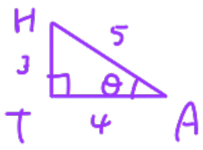
$\cos\theta=\frac{4}{5}$



$\left.\begin{array}{l}\overline{AC}\perp\overline{TP}\\ \overline{AC}\perp\overline{PH}\end{array}\right)$ $\overline{AC}\perp\triangle PTH$

$\rightarrow \overline{AC}\perp\overline{TH}$





$16-(4-5k)^2=16-(3k)^2$

$\therefore 4-5k=3k$

$k=\frac{1}{2}$

$\overline{PH}=\sqrt{16-\frac{9}{4}}=\frac{\sqrt{55}}{2}$

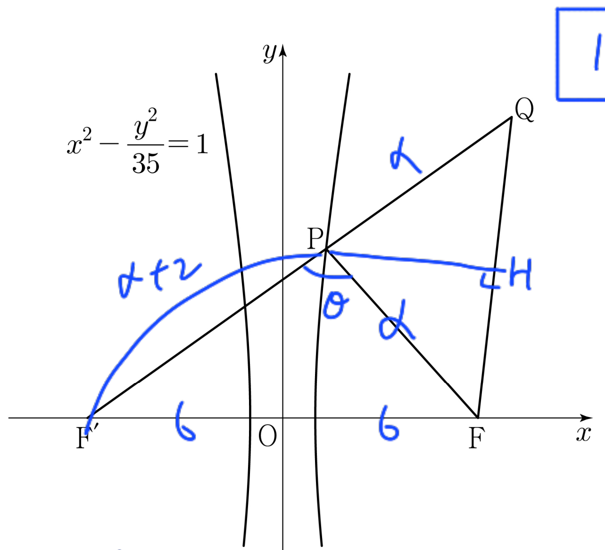
$\overline{PQ}=2\overline{PH}=\sqrt{55}$

단답형

29. 두 초점이 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F'}(-c,\ 0)$ $(c>0)$인 쌍곡선 $x^2-\dfrac{y^2}{35}=1$이 있다. 이 쌍곡선 위에 있는 제1사분면 위의 점 P에 대하여 직선 PF′ 위에 $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PF}}$인 점 Q를 잡자. 삼각형 QF′F와 삼각형 FF′P가 서로 닮음일 때, 삼각형 PFQ의 넓이는 $\dfrac{q}{p}\sqrt{5}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, $\overline{\mathrm{PF'}}<\overline{\mathrm{QF'}}$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$\boxed{107}$

$c^2=36$
$c=6$



$\dfrac{12}{2\alpha+2}=\dfrac{\alpha+2}{12}$

$\alpha^2+3\alpha+2=72$

$(\alpha-7)(\alpha+10)=0 \quad \alpha=7$

$\cos\theta=\dfrac{81+49-144}{2\cdot7\cdot9}=-\dfrac{1}{9}$, $\sin\theta=\dfrac{4\sqrt5}{9}$

$\triangle PQF=\dfrac{1}{2}\cdot7\cdot7\cdot\dfrac{4\sqrt5}{9}=\dfrac{98}{9}\sqrt5$

30. 좌표평면에 한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD가 있다.

$$|\overrightarrow{\mathrm{XB}}+\overrightarrow{\mathrm{XC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{XB}}-\overrightarrow{\mathrm{XC}}|$$

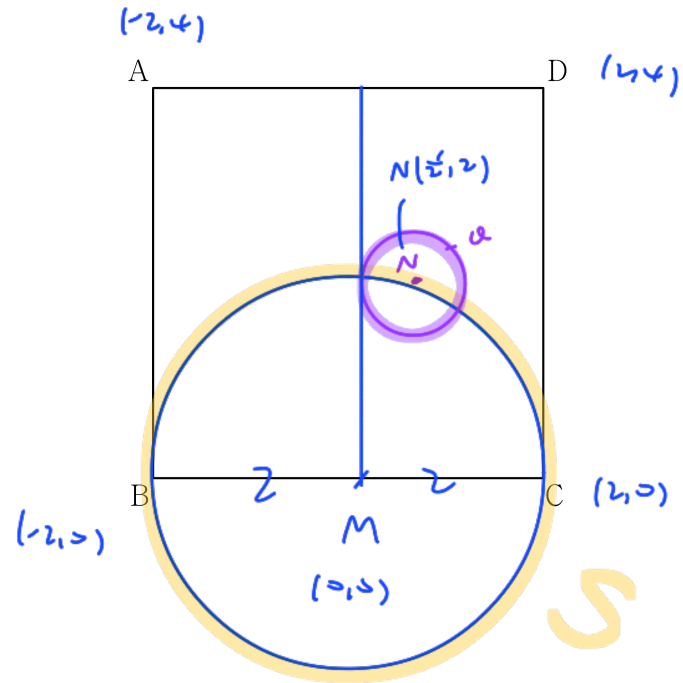
$2|\overrightarrow{XM}|=|\overrightarrow{CB}|=4,\ |\overrightarrow{XM}|=2$

를 만족시키는 점 X가 나타내는 도형을 S라 하자.
도형 S 위의 점 P에 대하여

$$4\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{PB}}+2\overrightarrow{\mathrm{PD}}$$

를 만족시키는 점을 Q라 할 때, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 하자. $M\times m$의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{316}$



$4|\overrightarrow{MQ}-\overrightarrow{MP}|=\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MP}+2\overrightarrow{MD}-2\overrightarrow{MP}$

$4\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MD}$

$\overrightarrow{MQ}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{MP}+\underbrace{\dfrac{1}{4}\overrightarrow{MB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{MD}}$ $\quad \dfrac{1}{4}(-2,0)+\dfrac{1}{2}(2,4)$
$=\left(\dfrac{1}{2},2\right)$

Q: 중심 $\left(\dfrac{1}{2},2\right)$ 반지름 $\dfrac{1}{2}$

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NQ})$

$=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{NQ}$

$=(4,-4)\cdot\left(\dfrac{5}{2},-2\right)+\overset{4\sqrt2}{|\overrightarrow{AC}|}\overset{\frac{1}{2}}{|\overrightarrow{NQ}|}\cos\theta$

$=18+2\sqrt2\cos\theta$ $\quad M=18+2\sqrt2$, $m=18-2\sqrt2$

$M\times m=324-8=316$

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.