Final

—①—

TH①. 지수로그함수 추론

출제 : 14번,20번,21번

[Prediction] 30%

지수로그함수와 상수함수의 교점 추론 문항이 나올 확률이 높다. 항상 이런 문항을 풀 때는 지수함수의 점근선을 극값과 끝값에 고정시키면서 유추해보면 좋다. 쉽게 말해 답지에 있을 것 같은 형태로 그림을 그리고 생각하자.

2024년 7월 교육청모의고사

2025 Trend

1. $m \leq -10$인 상수 m에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} |5\log_2(4-x)+m| & (x \leq 0) \\ 5\log_2 x+m & (x>0) \end{cases}$$

이다. 실수 t $(t>0)$에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 모든 실근의 합을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(m)$의 값을 구하시오.

> $t \geq a$인 모든 실수 t에 대하여 $g(t)=g(a)$가 되도록 하는 양수 a의 최솟값은 2이다.

2024년 5월 교육청모의고사

2025 Trend

2. 두 상수 a, b $(b>0)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} 2^{x+3}+b & (x \leq a) \\ 2^{-x+5}+3b & (x>a) \end{cases}$$

라 하자.

다음 조건을 만족시키는 실수 k의 최댓값이 $4b+8$일 때, $a+b$의 값은? (단, $k>b$)

> $b<t<k$인 모든 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수는 1이다.

① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

3. 두 자연수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{4}{x-3}+a & (x<2) \\ |5\log_2 x-b| & (x\geq 2) \end{cases}$$

이다. 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 최솟값을 구하시오.

(가) 함수 $g(t)$의 치역은 $\{0,\ 1,\ 2\}$이다.
(나) $g(t)=2$인 자연수 t의 개수는 6이다.

4. 자연수 n에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} |2^{x+3}-3| & (x\leq 0) \\ 3^{-x+2}-n & (x>0) \end{cases}$$

이라 하자. 다음 조건을 만족시키는 모든 자연수 n의 개수를 구하시오.

x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 실수 t가 존재한다.

TH②. 지수로그함수의 Graph

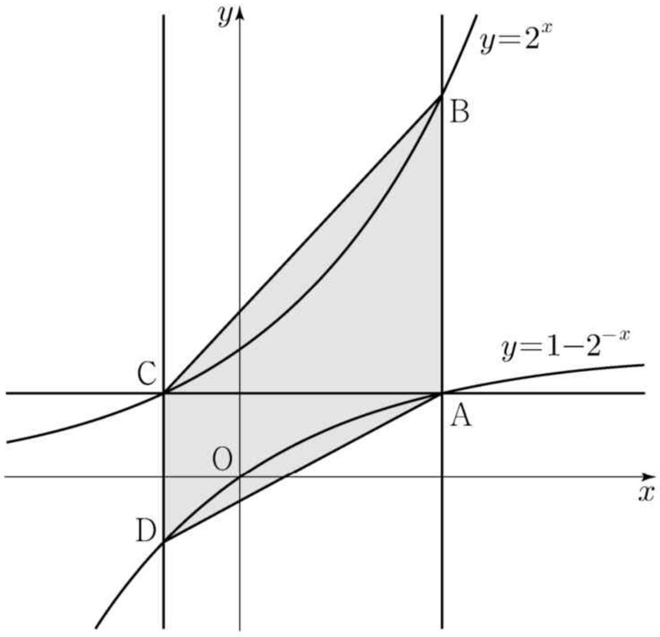
출제 : 11번,12번,13번

[Prediction] 10%

항상 출제가 되었던 기본 유형으로 출제가 될 수 있다.

2025학년도 6월 평가원모의고사

5. 그림과 같이 곡선 $y=1-2^{-x}$ 위의 제1사분면에 있는 점 A를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=2^{x}$과 만나는 점을 B라 하자. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=2^{x}$과 만나는 점을 C, 점 C를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=1-2^{-x}$과 만나는 점을 D라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{CD}}$일 때, 사각형 ABCD의 넓이는?



① $\frac{5}{2}log_{2}3-\frac{5}{4}$ ② $3\log_{2}3-\frac{3}{2}$ ③ $\frac{7}{2}log_{2}3-\frac{7}{4}$

④ $4\log_{2}3-2$ ⑤ $\frac{9}{2}log_{2}3-\frac{9}{4}$

2024년 3월 교육청모의고사

6. $a>2$인 실수 a에 대하여 기울기가 -1인 직선이 두 곡선

$$y=a^{x}+2,\ y=\log_{a}x+2$$

와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 선분 AB를 지름으로 하는 원의 중심의 y좌표가 $\frac{19}{2}$이고 넓이가 $\frac{121}{2}\pi$일 때, a^{2}의 값을 구하시오.

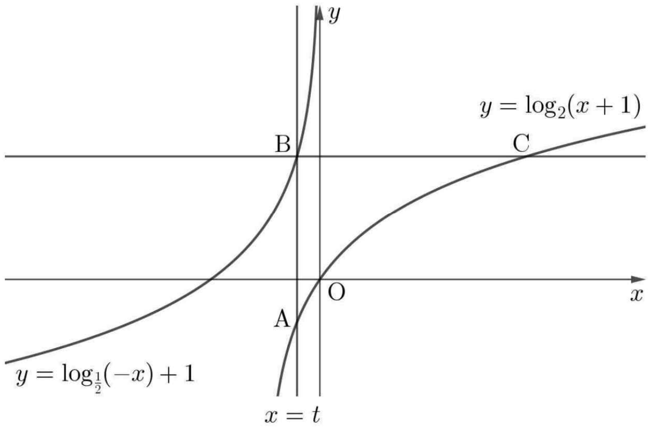
7. $-\frac{1}{2}<t<0$인 실수 t에 대하여 직선 $x=t$가 두 곡선

$$y=\log_2(x+1),\ y=\log_1(-x)+1$$

과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 B를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_2(x+1)$과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=\log_2 9$일 때, 선분 BC의 길이는?

① 4 ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{14}{3}$

④ 5 ⑤ $\frac{16}{3}$



8. 자연수 n에 대하여 함수

$$y=\left|2^{|x-n|}-2n\right|$$

의 그래프가 직선 $y=15$와 제1사분면에서 만나는 점의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{20} a_n$의 값은?

① 52 ② 55 ③ 58

④ 61 ⑤ 64

9. 자연수 n에 대하여 곡선 $y=2^x$ 위의 두 점 A_n, B_n이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 직선 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 기울기는 3이다.
(나) $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=n\times\sqrt{10}$

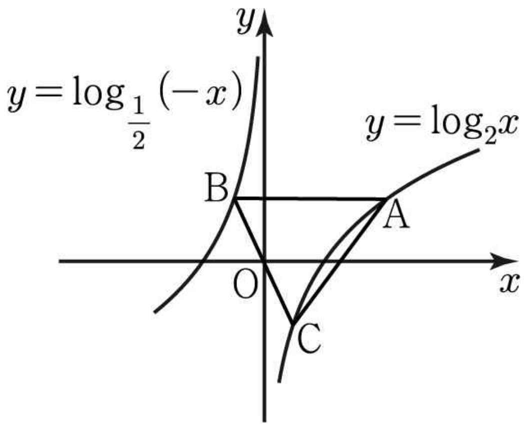
중심이 직선 $y=x$ 위에 있고 두 점 A_n, B_n을 지나는 원이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 두 점의 x좌표 중 큰 값을 x_n이라 하자. $x_1+x_2+x_3$의 값은?

① $\frac{150}{7}$ ② $\frac{155}{7}$ ③ $\frac{160}{7}$
④ $\frac{165}{7}$ ⑤ $\frac{170}{7}$

10. 원점 O를 지나는 직선 l이 함수 $y=2^x$의 그래프와 서로 다른 두 점 P, Q $(\overline{\mathrm{OP}}>\overline{\mathrm{OQ}})$에서 만난다. 직선 l이 함수 $y=-2^{-x}$의 그래프와 만나는 점 중 점 O와 가까운 점을 R이라 하자. $\overline{\mathrm{PQ}}:\overline{\mathrm{QR}}=3:2$일 때, 점 Q의 x좌표는?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

11. 함수 $y=\log_2 x$의 그래프 위의 제1사분면에 있는 점 A에 대하여 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(-x)$와 만나는 점을 B, 두 점 O, B를 지나는 직선이 함수 $y=\log_2 x$의 그래프와 만나는 점을 C라 하자. 삼각형 ABC가 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$인 이등변삼각형일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? (단, O는 원점이다.)



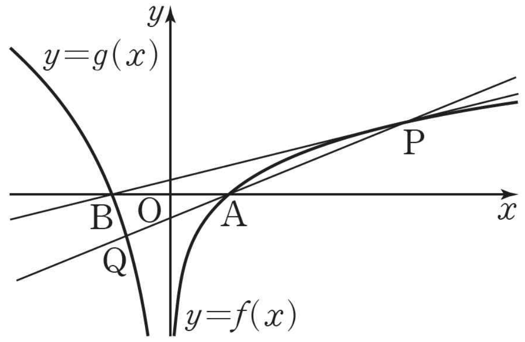
① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$

④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3

12. 그림과 같이 $k>1$인 상수 k에 대하여 두 함수

$f(x)=\log_4 x$, $g(x)=\log_k(-x)$가 있다.

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 x축과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에 대하여 직선 AP의 기울기를 m_1, 직선 BP의 기울기를 m_2, 직선 AP가 곡선 $y=g(x)$와 만나는 점을 Q(a, b)라 하자. $\frac{m_2}{m_1}=\frac{3}{5}$, $k^b=-\frac{9}{7}b$일 때, a의 값은? (단, 점 P는 제1사분면 위의 점이고, a, b는 상수이다.)

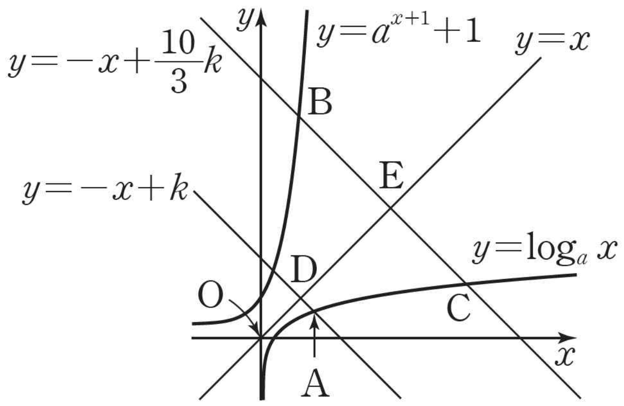


① $-\frac{7}{8}$ ② $-\frac{13}{16}$ ③ $-\frac{3}{4}$

④ $-\frac{11}{16}$ ⑤ $-\frac{5}{8}$

13. 그림과 같이 $a>1$인 상수 a와 $k>a+1$인 상수 k에 대하여 직선 $y=-x+k$가 곡선 $y=\log_a x$와 만나는 점을 A라 하고, 직선 $y=-x+\frac{10}{3}k$가 두 곡선 $y=a^{x+1}+1$, $y=\log_a x$와 만나는 점을 각각 B, C라 하자.

직선 $y=x$가 두 직선 $y=-x+k$, $y=-x+\frac{10}{3}k$와 만나는 점을 각각 D, E라 할 때, $\overline{\mathrm{AD}}=\frac{\sqrt{2}}{6}k$, $\overline{\mathrm{CE}}=\sqrt{2}k$이다. $a\times\overline{\mathrm{BE}}$의 값은? (단, 곡선 $y=\log_a x$와 직선 $y=x$는 만나지 않는다.)

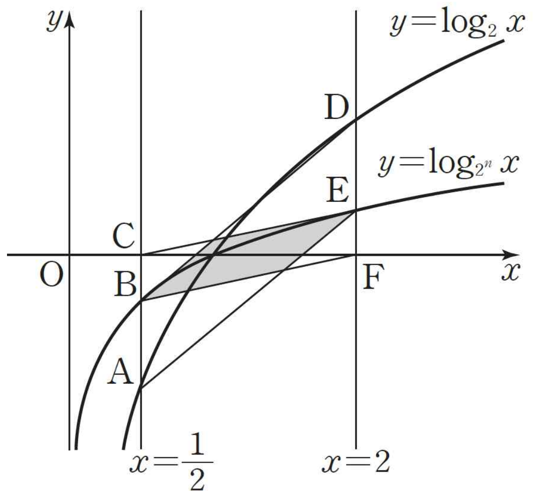


① $11\sqrt{2}$ ② $12\sqrt{2}$ ③ $13\sqrt{2}$
④ $14\sqrt{2}$ ⑤ $15\sqrt{2}$

2024년 수능완성

New

14. 그림과 같이 자연수 n $(n\geq 2)$에 대하여 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_{2^n} x$ 및 x축이 직선 $x=\frac{1}{2}$과 만나는 점을 각각 A, B, C라 하고 직선 $x=2$와 만나는 점을 각각 D, E, F라 하자. 두 사각형 AEDB, BFEC의 겹치는 부분의 넓이가 $\frac{1}{3}$이 되도록 하는 n의 값은? [4점]



① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

15. 10보다 작은 두 자연수 k, m에 대하여 두 함수

$$f(x)=|2^x-k|+m,$$

$$g(x)=\left(\log_2 \frac{x}{4}\right)^2+2\log_4 x-2$$

가 있다. x에 대한 방정식 $(g\circ f)(x)=0$이 n개의 실근을 갖도록 하는 k, m의 모든 순서쌍 (k, m)의 개수를 a_n이라 하자. a_1+a_3의 값을 구하시오. [4점]

1. [정답] 8

[해설]

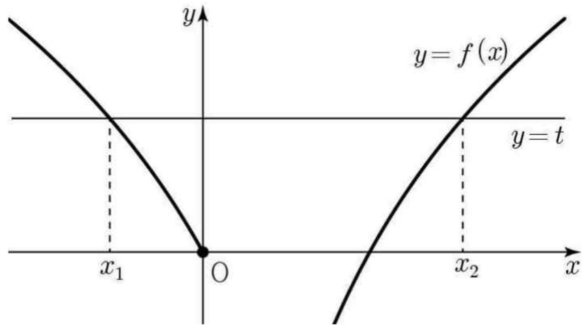
(i) $m=-10$인 경우

$f(0)=|10-10|=0$

$t>0$일 때,

방정식 $5\log_2(4-x)-10=t$의 실근을 x_1,

방정식 $5\log_2 x-10=t$의 실근을 x_2라 하자.



$5\log_2(4-x_1)-10=5\log_2 x_2-10$

$\log_2(4-x_1)=\log_2 x_2$

$4-x_1=x_2,\ x_1+x_2=4$

$t>0$인 모든 실수 t에 대하여

$g(t)=4$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $m<-10$인 경우

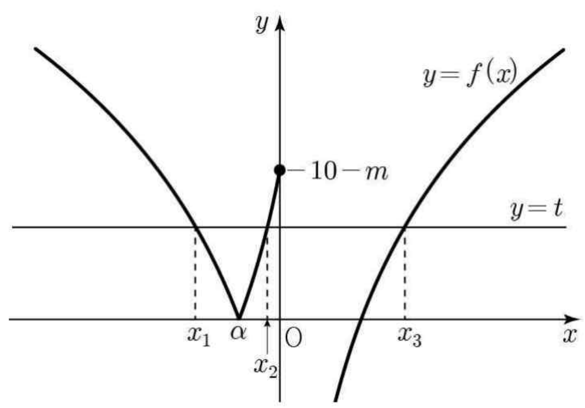
$x<0$에서 곡선 $y=f(x)$가 x축과 만나는 점의 x좌표를 α라 하면

$$f(x)=\begin{cases}5\log_2(4-x)+m & (x\le\alpha)\\ -5\log_2(4-x)-m & (\alpha<x\le 0)\\ 5\log_2 x+m & (x>0)\end{cases}$$

$f(0)=|10+m|=-10-m$

① $0<t<-10-m$일 때,

방정식 $5\log_2(4-x)+m=t$의 실근을 x_1, 방정식 $-5\log_2(4-x)-m=t$의 실근을 x_2, 방정식 $5\log_2 x+m=t$의 실근을 x_3이라 하자.



$5\log_2(4-x_1)+m=5\log_2 x_3+m$

$\log_2(4-x_1)=\log_2 x_3$

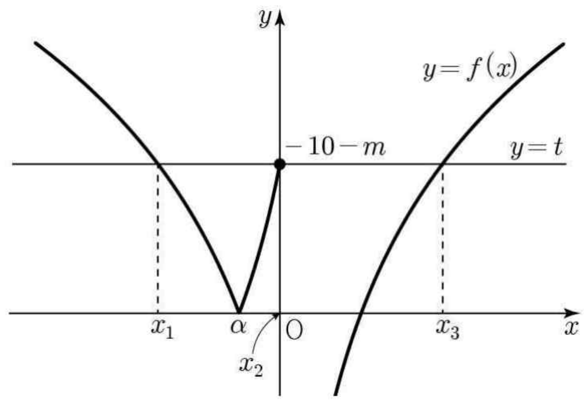
$4-x_1=x_3,\ x_1+x_3=4$

$g(t)=x_1+x_2+x_3=x_2+4<4$이고

$g(t)$의 값은 일정하지 않다.

② $t=-10-m$일 때,

방정식 $5\log_2(4-x)+m=t$의 실근을 x_1, 방정식 $-5\log_2(4-x)-m=t$의 실근을 x_2, 방정식 $5\log_2 x+m=t$의 실근을 x_3이라 하자.



$5\log_2(4-x_1)+m=5\log_2 x_3+m$

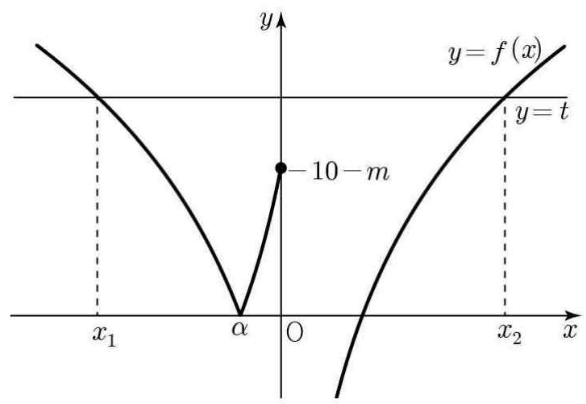
$\log_2(4-x_1)=\log_2 x_3$, $4-x_1=x_3$

$x_1+x_3=4,\ x_2=0$이므로

$g(t)=x_1+x_2+x_3=4$

③ $t>-10-m$일 때,

방정식 $5\log_2(4-x)+m=t$의 실근을 x_1, 방정식 $5\log_2 x+m=t$의 실근을 x_2라 하자.



$5\log_2(4-x_1)+m=5\log_2 x_2+m$

$\log_2(4-x_1)=\log_2 x_2$

$4-x_1=x_2,\ x_1+x_2=4$

$g(t)=x_1+x_2=4$

①, ②, ③에 의하여 $t\ge-10-m$인 모든 실수 t에 대하여 $g(t)=4$

(i), (ii)에 의하여 $t\ge a$인 모든 실수 t에 대하여 $g(t)=g(a)$가 되도록 하는 a의 최솟값은 $-10-m$이다.

$-10-m=2,\ m=-12$

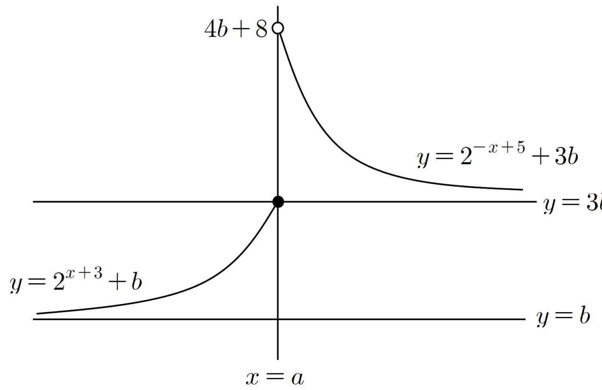
따라서 $f(m)=f(-12)$

$=|5\log_2(4+12)-12|$

$=8$

2. **정답** ①

$b<t<k$사이에 모든 점에서 수평선과 한번 만나는 그래프를 그려보면 아래 그림과 같다.



$2^{a+3}+b=3b,\ 2^{-a+5}+3b=4b+8$

$\begin{cases} 2^{a+3}=2b \\ 2^{-a+5}=b+8 \end{cases}$ 두 식을 곱하면, $2^8=2b^2+16b,\ b^2+8b-128=0$

$(b+16)(b-8)=0,\ b=8\ (\because\ b>0)$

$2^{a+3}=16,\ a=1,\ \therefore\ a+b=9$

3. [정답] 15

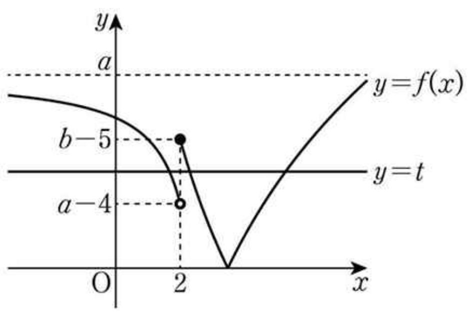
[해설]

$x<2$에서 함수 $y=\dfrac{4}{x-3}+a$는 감소한다.

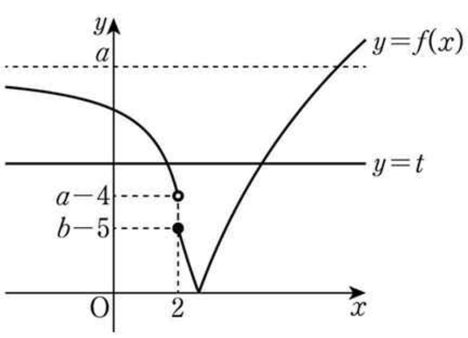
함수 $y=5\log_2 x-b$는 증가하고 $f(2)=|5-b|$이다.

(ⅰ) $5-b<0,\ b>5$인 경우

$a-4<b-5$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



(가)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$는 서로 다른 세 점에서 만나지 않아야 하므로 아래 그림과 같이 $a-4\geq b-5,\ b-a\leq 1$을 만족시켜야 한다.

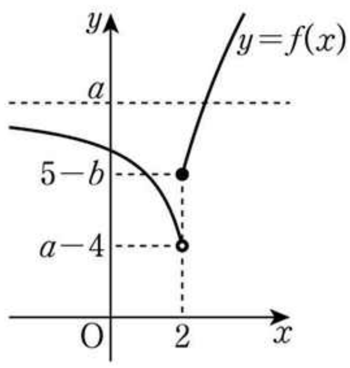


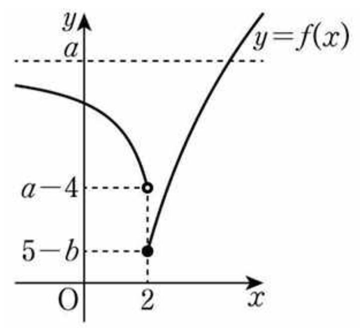
(나)에서 $g(t)=2$가 되도록 하는 자연수 t는 $a-1,\ a-2,\ a-3$과 $b-5$ 이하의 자연수이므로 t의 개수가 6이면 $b-5=3,\ b=8$이다.

$b-a\leq 1$이므로 $8-a\leq 1$에서 $a\geq 7$이다. 그러므로 $a\geq 7$, $b=8$이다.

(ⅱ) $5-b\geq 0,\ b\leq 5$인 경우

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.





$g(t)=2$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$는 $x<2$에서 한 점에서 만나고, $x\geq 2$에서 한 점에서 만난다. 그런데 $x<2$에서 $a-4<f(x)<a$이고, $a-4$보다 크고 a보다 작은 정수는 $a-3$, $a-2,\ a-1$로 3개뿐이므로 자연수 t의 최대 개수는 3이고 (나)를 만족시키지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a\geq 7,\ b=8$이므로 $a+b\geq 15$

따라서 $a+b$의 최솟값은 15이다.

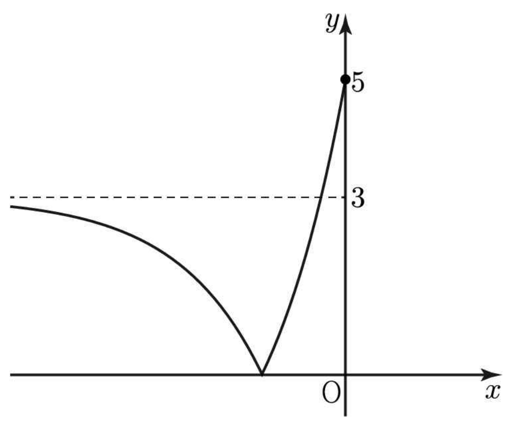
4. **정답** 8

풀이

$x\leq 0$일 때, 함수 $y=|2^{x+3}-3|$의 그래프는 함수 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 후 x축의 아랫부분의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.이때 함수 $y=2^{x+3}-3$의 그래프의 점근선은 직선 $y=-3$이므로 함수 $y=|2^{x+3}-3|$의 그래프의 점근선은 직선 $y=3$ …… ㉠

또 $x=0$일 때, $y=|2^3-3|=5$이므로

함수 $y=|2^{x+3}-3|\ (x\leq 0)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



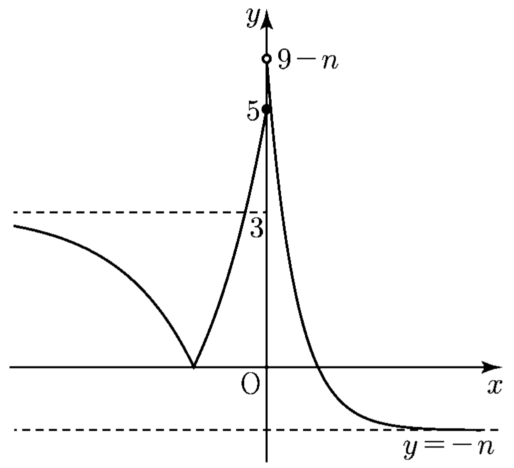
한편, $3^{-x+2}-n=3^{-(x-2)}-n$이므로 $x>0$일 때, 함수 $y=3^{-x+2}-n$의 그래프는 함수 $y=3^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 $-n$만큼 평행이동한 것이다.

이때 함수 $y=3^{-(x-2)}-n$의 그래프의 점근선은 직선 $y=-n$ …… ㉡

또, $x=0$일 때, $y=9-n$이므로 함수 $y=3^{-(x-2)}-n$의 그래프는 점 $(0,\ 9-n)$을 지난다.

한편, 방정식 $f(x)=t$의 실근은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 x좌표이다.

이때 ㉠, ㉡과 함수 $y=|2^{x+3}-3|$의 그래프가 y축과 만나는 점 $(0,\ 5)$를 이용하여 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



그러므로 조건을 만족시키기 위해서는 $9-n>0$이어야 한다.
즉, $n<9$
따라서 조건을 만족시키는 모든 자연수 n의 값은 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 8$이고 그 개수는 8이다.

5. [정답] ③

[출처]	2024년(2025학년도) 평가원 고3공통 06월 공통범위 12 [4.00점]

[해설]
주어진 그림에서 두 점 A, C의 x좌표를 각각 $k\ (k>0)$, $m\ (m<0)$이라 하면

$$\mathrm{A}(k,\ 1-2^{-k}),\ \mathrm{B}(k,\ 2^k),\ \mathrm{C}(m,\ 2^m),\ \mathrm{D}(m,\ 1-2^{-m})$$

두 점 A, C의 y좌표가 같으므로

$$1-2^{-k}=2^m \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\overline{\mathrm{AB}}=2^k+2^{-k}-1$, $\overline{\mathrm{CD}}=2^m+2^{-m}-1$이고 $\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{CD}}$에서

$$2^k+2^{-k}-1=2(2^m+2^{-m}-1) \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$2^k+2^{-k}-1=2\left(1-2^{-k}+\frac{1}{1-2^{-k}}-1\right)$$

$2^k=a\ (a>0)$이라 하면

$$a+\frac{1}{a}-1=2\left(\frac{1}{1-\frac{1}{a}}-\frac{1}{a}\right),$$

$$\frac{a^2-a+1}{a}=2\times\frac{a^2-a+1}{a}\times\frac{1}{a-1}$$

이때 $a\neq 0$, $a^2-a+1\neq 0$이므로

$$1=\frac{2}{a-1}, \qquad a-1=2$$

$$\therefore\ a=3$$

즉 $2^k=3$에서 $k=\log_2 3$이고 $2^{-k}=\frac{1}{3}$이므로 ㉠에서

$$2^m=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}, \qquad m=\log_2\frac{2}{3}$$

따라서 $\mathrm{A}\left(\log_2 3,\ \frac{2}{3}\right)$, $\mathrm{B}(\log_2 3,\ 3)$, $\mathrm{C}\left(\log_2\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$, $\mathrm{D}\left(\log_2\frac{2}{3},\ -\frac{1}{2}\right)$이므로

$$\overline{\mathrm{AC}}=\log_2 3-\log_2\frac{2}{3}=\log_2\frac{9}{2},$$

$$\overline{\mathrm{AB}}=3-\frac{2}{3}=\frac{7}{3},$$

$$\overline{\mathrm{CD}}=\frac{2}{3}-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{6}$$

삼각형 ABC, ACD의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하면

$$S_1=\frac{1}{2}\times\log_2\frac{9}{2}\times\frac{7}{3}=\frac{7}{3}log_2 3-\frac{7}{6},$$

$$S_2=\frac{1}{2}\times\log_2\frac{9}{2}\times\frac{7}{6}=\frac{7}{6}log_2 3-\frac{7}{12}$$

따라서 구하려는 사각형 ABCD의 넓이는

$$S_1+S_2=\left(\frac{7}{3}log_2 3-\frac{7}{6}\right)+\left(\frac{7}{6}log_2 3-\frac{7}{12}\right)$$
$$=\frac{7}{2}log_2 3-\frac{7}{4}$$

6. [정답] 13

[해설]
선분 AB를 지름으로 하는 원의 중심을 점 $\mathrm{C}\left(k,\ \frac{19}{2}\right)$라 할 때, 점 C는 선분 AB의 중점이다.
두 곡선 $y=a^x+2$, $y=\log_a x+2$를 y축의 방향으로 각각 -2만큼 평행이동한 두 곡선 $y=a^x$, $y=\log_a x$가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 점 A, B를 y축의 방향으로 각각 -2만큼 평행이동한 두 점 A′, B′도 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
점 C를 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 점 $\mathrm{C}'\left(k,\ \frac{15}{2}\right)$가 선분 A′B′의 중점이므로 점 C′은 직선 $y=x$ 위에 있다. 그러므로 $k=\frac{15}{2}$이다.
넓이가 $\frac{121}{2}\pi$인 원의 반지름의 길이는 $\overline{\mathrm{A'C'}}=\frac{11\sqrt{2}}{2}$이고 직선 A′B′의 기울기가 -1이므로
점 A′의 좌표는 $\left(\frac{15}{2}-\frac{11}{2},\ \frac{15}{2}+\frac{11}{2}\right)=(2,\ 13)$
점 A′$(2,\ 13)$이 곡선 $y=a^x$ 위의 점이므로 $a^2=13$

7. [정답] ⑤

8. [정답] ④

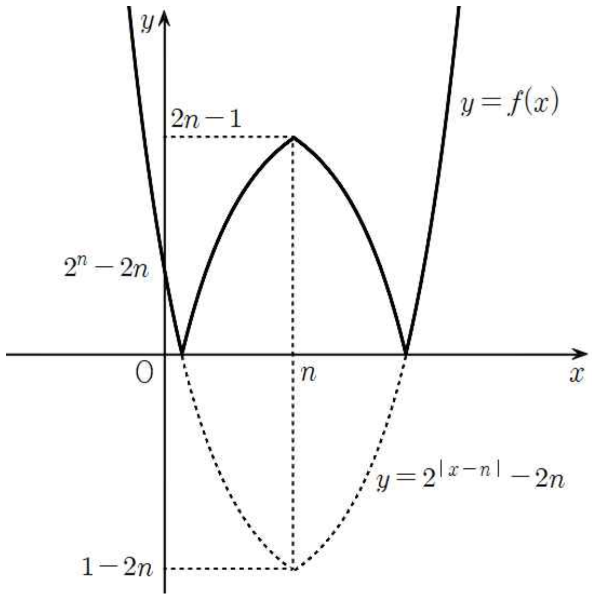
[해설]
자연수 n에 대하여 함수 $f(x)=\left|2^{|x-n|}-2n\right|$이라 하자.

$$f(2n-x)=\left|2^{|n-x|}-2n\right|$$
$$=\left|2^{|x-n|}-2n\right|$$
$$=f(x)$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=n$에 대하여 대칭이다.
n이 자연수이므로

$$f(n)=|1-2n|=2n-1$$
$$f(0)=|2^n-2n|=2^n-2n$$

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=15$ 의 제1 사분면에서의 교점의 개수가 a_n 이다.

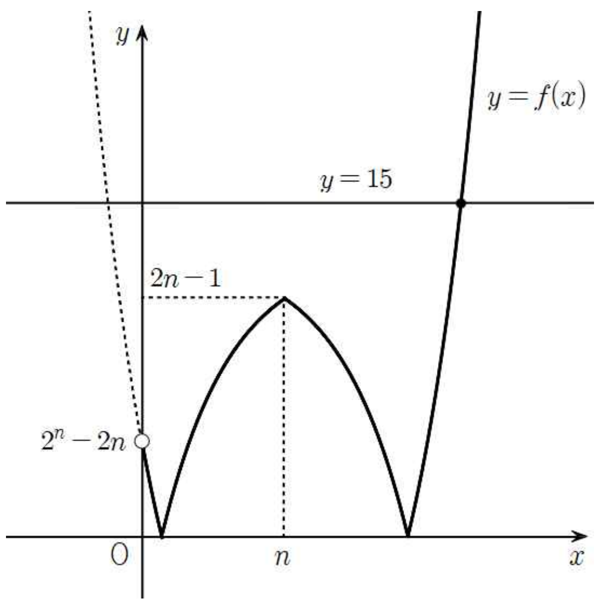
(i) $f(0)<15$ 일 때

$2^n-2n<15$, $\quad 2^n<2n+15$

따라서 $f(0)<15$ 인 자연수 n 의 값은

$n=1$, $n=2$, $n=3$, $n=4$

이때, $2n-1<15$, 즉 $f(n)<15$ 이다.



위의 그림에 의하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=15$ 의 제1 사분면에서의 교점의 개수는 1 이다.

$\therefore$ $a_1=1$, $a_2=1$, $a_3=1$, $a_4=1$

(ii) $f(0)>15$ 일 때

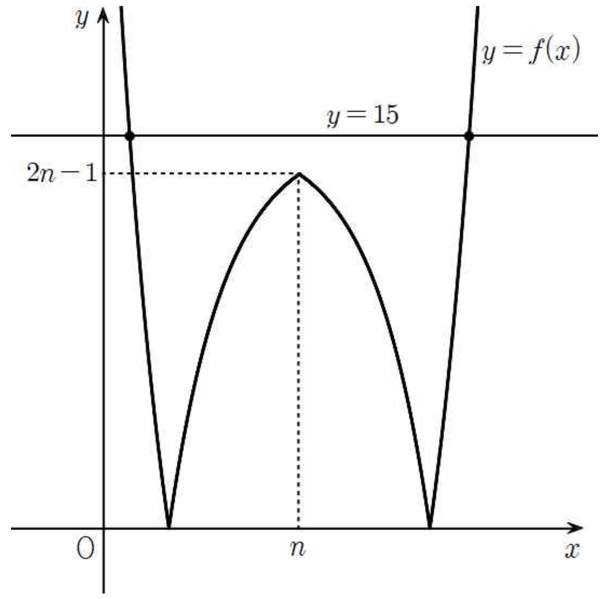
$2^n-2n>15$, $\quad 2^n>2n+15$

따라서 $f(0)>15$ 인 자연수 n 의 값은

$n=5$, $n=6$, $n=7$, $\cdots$

(a) $f(n)<15$ 일 때

$2n-1<15$, $\quad n=5$, $n=6$, $n=7$

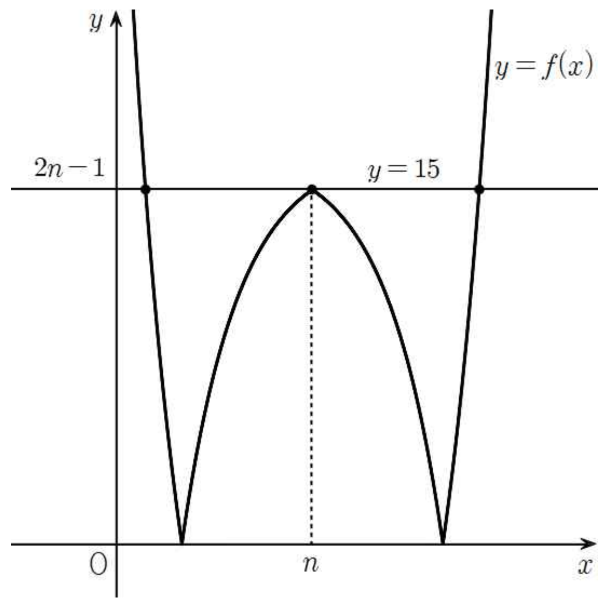


위의 그림에 의하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=15$ 의 제1 사분면에서의 교점의 개수는 2 이다.

$a_5=2$, $a_6=2$, $a_7=2$

(b) $f(n)=15$ 일 때

$2n-1=15$, $\quad n=8$

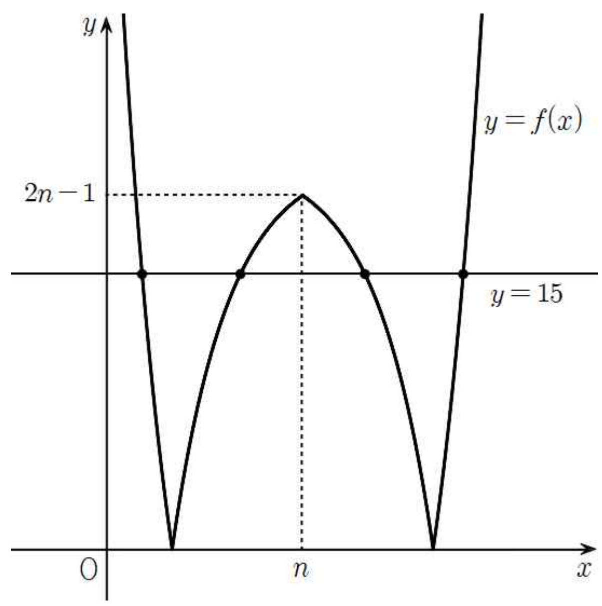


위의 그림에 의하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=15$ 의 제1 사분면에서의 교점의 개수는 3 이다.

$a_8=3$

(c) $f(n)>15$ 일 때

$2n-1>15$, $\quad n=9$, $n=10$, $n=11$, $\cdots$



위의 그림에 의하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=15$ 의 제1 사분면에서의 교점의 개수는 4 이다.

$$a_9=4,\ a_{10}=4,\ a_{11}=4,\ \cdots$$

이상에서 자연수 n에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=15$의 제1사분면에서의 교점의 개수는

$$a_n=\begin{cases}1 & (n=1,\ 2,\ 3,\ 4)\\ 2 & (n=5,\ 6,\ 7)\\ 3 & (n=8)\\ 4 & (n=9,\ 10,\ 11,\ \cdots\ )\end{cases}$$

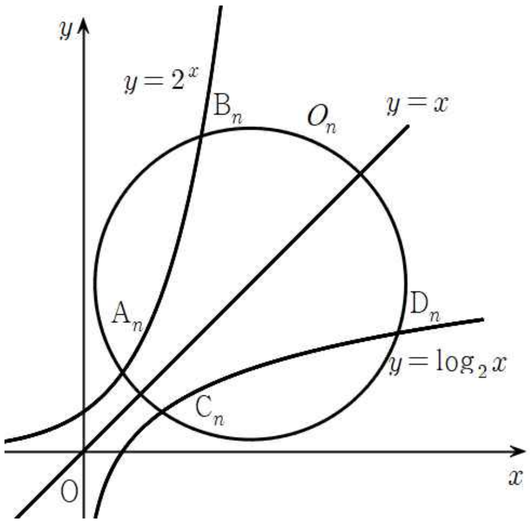
이므로

$$\sum_{n=1}^{20}a_n=1\times4+2\times3+3\times1+4\times12$$
$$=61$$

9. [정답] ⑤

[해설]

곡선 $y=2^x$ 위의 두 점 A_n, B_n 중 x좌표가 작은 점을 A_n이라 하고, 중심이 직선 $y=x$ 위에 있고 두 점 A_n, B_n을 지나는 원을 O_n이라 하자. 이 원이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 두 점을 C_n, D_n이라 하고 이 두 점 중에서 x좌표가 큰 점을 D_n이라 하자. 곡선 $y=2^x$, $y=\log_2 x$와 원 O_n, 네 점 A_n, B_n, C_n, D_n은 다음과 같다.



이때, 함수 $y=2^x$와 함수 $y=\log_2 x$은 서로 역함수 관계이므로 두 점 A_n과 C_n, 두 점 B_n과 D_n은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

점 A_n의 x좌표를 α_n이라 하면,

$$\mathrm{A}_n\left(\alpha_n,\ 2^{\alpha_n}\right),\ \mathrm{C}_n\left(2^{\alpha_n},\ \alpha_n\right)$$

조건 (나)에서 $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=n\times\sqrt{10}$이고, 조건 (가)에서 직선 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 기울기는 3이므로 점 B_n의 좌표는

$$\mathrm{B}_n\left(\alpha_n+\mathrm{n},\ 2^{\alpha_n}+3\mathrm{n}\right)$$

이고, 두 점 B_n과 D_n은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 점 D_n의 좌표는

$$\mathrm{D}_n\left(2^{\alpha_n}+3\mathrm{n},\ \alpha_n+\mathrm{n}\right)$$

이다. 또한 점 $\mathrm{B}_n\left(\alpha_n+\mathrm{n},\ 2^{\alpha_n}+3\mathrm{n}\right)$은 곡선 $y=2^x$ 위의 점이므로

$$2^{\alpha_n}+3n=2^{\alpha_n+n},\qquad 2^{\alpha_n}\times\left(2^n-1\right)=3n$$

$$\therefore\ 2^{\alpha_n}=\frac{3n}{2^n-1}$$

이때, 원 O_n이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 두 점 중의 x좌표가 큰 점이 D_n이므로

$$x_n=2^{\alpha_n}+3n=\frac{3n}{2^n-1}+3n=\frac{3n\times2^n}{2^n-1}$$

$$\therefore\ x_1+x_2+x_3=6+8+\frac{72}{7}=\frac{170}{7}$$

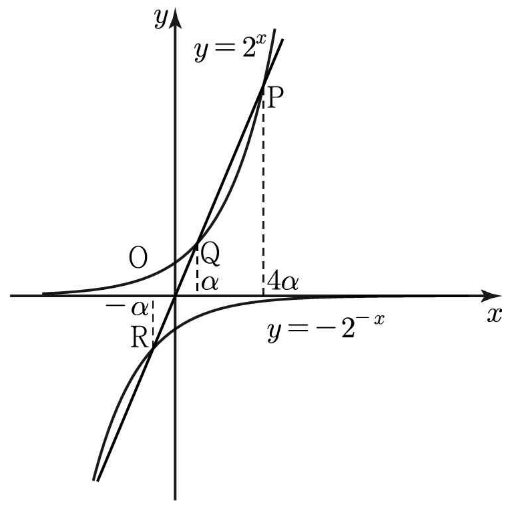
10. 정답 ④

풀이

두 함수 $y=2^x$, $y=-2^{-x}$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 두 점 Q, R도 원점에 대하여 대칭이다.

또 $\overline{\mathrm{PQ}}:\overline{\mathrm{QR}}=3:2$이므로 점 Q의 x좌표를 α $(\alpha>0)$으로 놓으면

$\mathrm{Q}(\alpha,\ 2^{\alpha})$, $\mathrm{R}(-\alpha,\ -2^{\alpha})$, $\mathrm{P}(4\alpha,\ 2^{4\alpha})$



직선 OQ와 직선 OP의 기울기가 서로 같으므로

$$\frac{2^{\alpha}-0}{\alpha-0}=\frac{2^{4\alpha}-0}{4\alpha-0}$$

$\alpha>0$이므로 $2^{\alpha}\times4=2^{4\alpha}$

$2^{\alpha+2}=2^{4\alpha}$, $4\alpha=\alpha+2$

따라서 $\alpha=\dfrac{2}{3}$

11. 정답 ③

풀이

점 A의 좌표를 $(a,\ \log_2 a)$ $(a>1)$이라 하면 점 B의 y좌표는 $\log_2 a$이므로 점 B의 x좌표는

$\log_{\frac{1}{2}}(-x)=\log_2 a$에서 $-\log_2(-x)=\log_2 a$

$$\log_2\left(-\frac{1}{x}\right)=\log_2 a\ ,\ -\frac{1}{x}=a\qquad\therefore\ x=-\frac{1}{a}$$

그러므로 점 B의 좌표는 $\left(-\dfrac{1}{a},\ \log_2 a\right)$

한편, 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(-x)$는 $y=\log_{\frac{1}{2}}(-x)=-\log_2(-x)$이므로 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(-x)$의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것이다.

그러므로 원점 O는 선분 BC의 중점이다.

이때 삼각형 ABC가 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$인 이등변삼각형이므로 $\overline{\mathrm{OA}}\perp\overline{\mathrm{OB}}$

두 직선 OA, OB가 서로 수직이므로

$$\frac{\log_2 a}{a}\times\frac{\log_2 a}{-\frac{1}{a}}=-1\ ,\ \left(\log_2 a\right)^2=1$$

$\log_2 a=1$ 또는 $\log_2 a=-1$

$a=2$ 또는 $a=\dfrac{1}{2}$

이때 $a>1$이므로 $a=2$

따라서 $\mathrm{A}(2,\ 1)$, $\mathrm{B}\left(-\frac{1}{2},\ 1\right)$이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{OA}}&=\frac{1}{2}\times 2\overline{\mathrm{OB}}\times\mathrm{OA}\\&=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+1^2}\times\sqrt{2^2+1^2}\\&=\frac{\sqrt{5}}{2}\times\sqrt{5}\\&=\frac{5}{2}\end{aligned}$$

12. **정답** ③

점 P의 x좌표를 $t(t>1)$이라 하면 $\mathrm{P}(t,\ \log_4 t)$이다.

$\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{B}(-1,\ 0)$이므로

$m_1=\frac{\log_4 t-0}{t-1}=\frac{\log_4 t}{t-1}$, $m_2=\frac{\log_4 t-0}{t-(-1)}=\frac{\log_4 t}{t+1}$

$\frac{m_2}{m_1}=\frac{3}{5}$에서 $3m_1=5m_2$, $3\times\frac{\log_4 t}{t-1}=5\times\frac{\log_4 t}{t+1}$

$t>1$에서 $\log_4 t>0$이므로 $\frac{3}{t-1}=\frac{5}{t+1}$

$5t-5=3t+3$, $t=4$

$\mathrm{P}(4,\ 1)$이므로 직선 AP의 방정식은

$y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$

점 $\mathrm{Q}(a,\ b)$는 직선 AP의 위의 점이므로

$b=\frac{1}{3}a-\frac{1}{3}$ …… ㉠

점 $\mathrm{Q}(a,\ b)$는 곡선 $y=g(x)$ 위의 점이므로

$b=\log_k(-a)$, $k^b=-a$

$k^b=-\frac{9}{7}b$이므로 $-a=-\frac{9}{7}b$

$b=\frac{7}{9}a$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{7}{9}a=\frac{1}{3}a-\frac{1}{3}$, $\frac{4}{9}a=-\frac{1}{3}$

따라서 $a=-\frac{3}{4}$

13. **정답** ④

두 식 $y=x$, $y=-x+k$를 연립하여 풀면

$x=y=\frac{1}{2}k$이므로 점 D의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}k,\ \frac{1}{2}k\right)$

$\overline{\mathrm{AD}}=\frac{\sqrt{2}}{6}k$이므로 점 A의 좌표는

$\left(\frac{1}{2}k+\frac{1}{6}k,\ \frac{1}{2}k-\frac{1}{6}k\right)$, 즉 $\left(\frac{2}{3}k,\ \frac{1}{3}k\right)$

두 식 $y=x$, $y=-x+\frac{10}{3}k$를 연립하여 풀면

$x=y=\frac{5}{3}k$이므로 점 E의 좌표는 $\left(\frac{5}{3}k,\ \frac{5}{3}k\right)$

$\overline{\mathrm{CE}}=\sqrt{2}k$이므로 점 C의 좌표는

$\left(\frac{5}{3}k+k,\ \frac{5}{3}k-k\right)$, 즉 $\left(\frac{8}{3}k,\ \frac{2}{3}k\right)$

두 점 A, C는 곡선 $y=\log_a x$ 위의 점이므로

$\frac{1}{3}k=\log_a\frac{2}{3}k$, $\frac{2}{3}k=\log_a\frac{8}{3}k$

두 식을 연립하여 풀면

$2\log_a\frac{2}{3}k=\log_a\frac{8}{3}k$, $\log_a\left(\frac{2}{3}k\right)^2=\log_a\frac{8}{3}k$

$\frac{4}{9}k^2=\frac{8}{3}k$, $k(k-6)=0$

$k>a+1>2$이므로 $k=6$

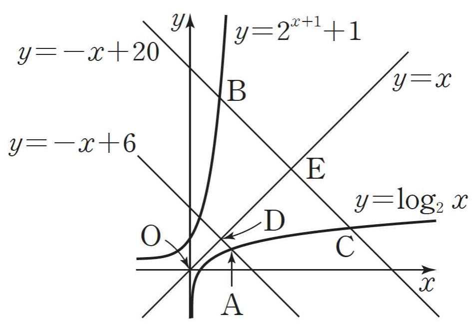
$k=6$을 $\frac{1}{3}k=\log_a\frac{2}{3}k$에 대입하면 $2=\log_a 4$, $a^2=4$

$a>1$이므로 $a=2$

즉, $a=2$, $k=6$이므로 $y=a^{x+1}+1=2^{x+1}+1$,

$y=\log_a x=\log_2 x$

$y=-x+\frac{10}{3}k=-x+20$이고 $\mathrm{C}(16,\ 4)$, $\mathrm{E}(10,\ 10)$



두 곡선 $y=2^x$, $y=\log_2 x$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고 곡선 $y=2^{x+1}+1$은 곡선 $y=2^x$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 곡선이다. 그러므로 점 B는 점 C를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 점이다.

점 C의 좌표가 $(16,\ 4)$이므로 점 B의 좌표는 $(4-1,\ 16+1)$, 즉 $(3,\ 17)$이고 $\overline{\mathrm{BE}}=\sqrt{(10-3)^2+(10-17)^2}=7\sqrt{2}$

따라서 $a\times\overline{\mathrm{BE}}=2\times7\sqrt{2}=14\sqrt{2}$

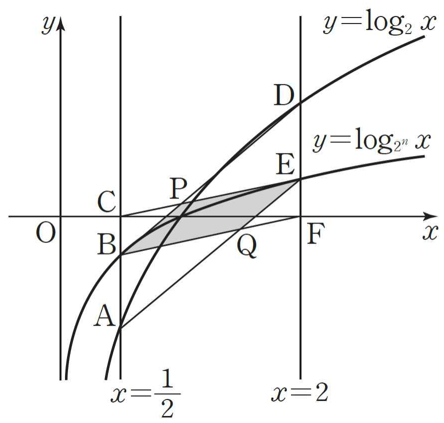
14. **정답** ②

$\log_{2^n}x=\frac{1}{n}\log_2 x$ 이므로

$\mathrm{A}\left(\frac{1}{2},\ -1\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{n}\right)$, $\mathrm{C}\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$, $\mathrm{D}(2,\ 1)$, $\mathrm{E}\left(2,\ \frac{1}{n}\right)$,

$\mathrm{F}(2,\ 0)$ 그러므로 두 사각형 AEDB, BFEC는 각각 평행사변형이고, 사각형 BFEC의 넓이는

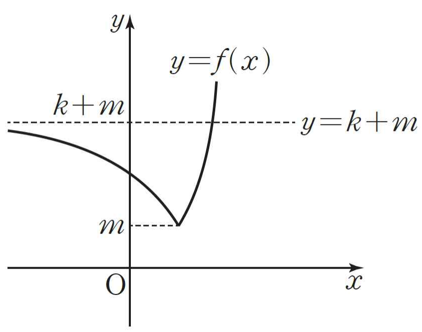
$\frac{1}{n}\times\left(2-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2n}$



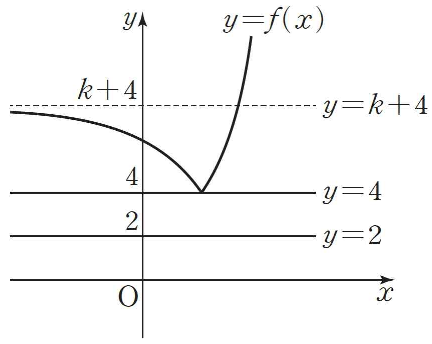
두 직선 BD, CE의 교점을 P, 두 직선 AE, BF의 교점을 Q라 하면
두 삼각형 BPC, EQF는 서로 합동이다.
한편, 두 삼각형 AQB, EQF는 서로 닮은 도형이고 닮음비는
$\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{EF}}=\left(1-\frac{1}{n}\right) : \frac{1}{n}=(n-1) : 1$이다.
그러므로 변 EF를 밑변으로 했을 때, 삼각형 EQF의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\frac{1}{n}\times\left\{\frac{1}{n}\times\left(2-\frac{1}{2}\right)\right\}=\frac{3}{4n^2}$
두 사각형 AEDB, BFEC의 겹치는 부분의 넓이는 사각형 BFEC의 넓이에서 서로 합동인 두 삼각형 BPC, EQF의 넓이를 뺀 값과 같으므로
$\frac{2}{2n}-2\times\frac{3}{4n^2}=\frac{3}{2n}-\frac{3}{2n^2}$
$\frac{3}{2n}-\frac{3}{2n^2}=\frac{1}{3}$에서
$2n^2-9n+9=0,\ (2n-3)(n-3)=0$
따라서 $n=3$

15. **정답** 19

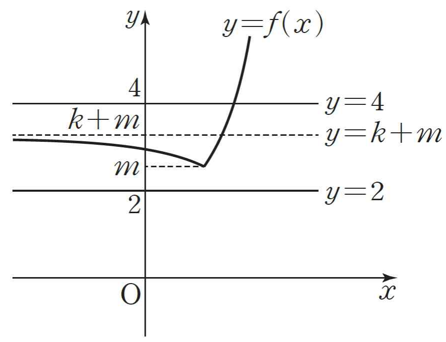
10보다 작은 두 자연수 $k,\ m$에 대하여 $f(x)=|2^x-k|+m$에서
함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



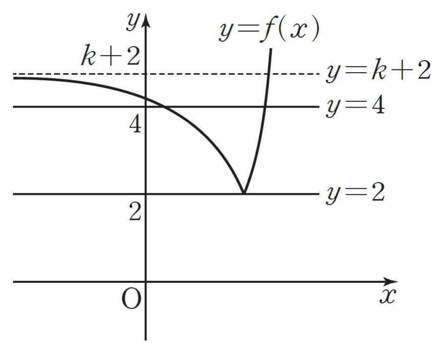
$g(x)=\left(\log_2\frac{x}{4}\right)^2+2\log_4 x-2=(\log_2 x-\log_2 4)^2+\log_2 x-2$
$\quad=(\log_2 x-2)^2+\log_2 x-2=(\log_2 x)^2-3\log_2 x+2$
$\quad=(\log_2 x-1)(\log_2 x-2)$
방정식 $(g\circ f)(x)=g(f(x))=0$에서
$\log_2 f(x)=1$ 또는 $\log_2 f(x)=2$
$f(x)=2$ 또는 $f(x)=2^2=4$
(ⅰ) x에 대한 방정식 $(g\circ f)(x)=0$이 1개의 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=2$ 또는 직선 $y=4$와 만나는 점이 1개가 되어야 한다.
그런데 직선 $y=2$가 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나면 직선 $y=4$도 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나므로 방정식 $(g\circ f)(x)=0$은 2개 이상의 실근을 갖는다.
즉, 방정식 $(g\circ f)(x)=0$이 1개의 실근을 가지려면
$m=4$이거나 $m>2$이고 $k+m\le 4$이어야 한다.
① $m=4$인 경우



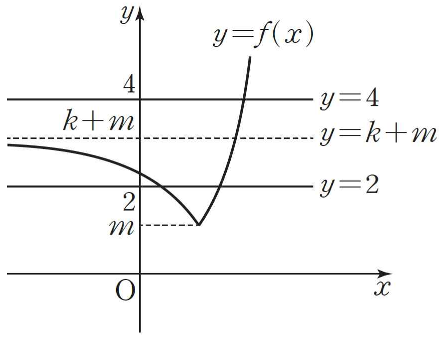
순서쌍 $(k,\ m)$은 $(1,\ 4),\ (2,\ 4),\ (3,\ 4),\ \cdots,\ (9,\ 4)$이고, 그 개수는 9이다.
② $m>2$이고 $k+m\le 4$인 경우



순서쌍 $(k,\ m)$은 $(1,\ 3)$이고, 그 개수는 1이다.
①, ②에서 구하는 순서쌍 $(k,\ m)$의 개수는 $9+1=10$이므로
$a_1=10$
(ⅱ) x에 대한 방정식 $(g\circ f)(x)=0$이 3개의 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=2$ 또는 $y=4$와 만나는 점이 3개가 되어야 한다.
① $m=2$인 경우
직선 $y=2$와 함수 $y=f(x)$의 그래프는 한 점에서만 만난다.



함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=4$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로
$k+2>4$에서 $k>2$
따라서 순서쌍 $(k,\ m)$은 $(3,\ 2),\ (4,\ 2),\ (5,\ 2),\ \cdots,$
$(9,\ 2)$이고, 그 개수는 7이다.
② $m\neq 2$인 경우
조건을 만족시키려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2$가 서로 다른 두 점에서 만나고, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=4$는 한점에서만 만나야 하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



이때 $m<2$, $2<k+m\le 4$이므로

$m=1$, $1<k\le 3$

따라서 순서쌍 $(k,\ m)$은 $(2,\ 1)$, $(3,\ 1)$이고, 그 개수는 2이다.

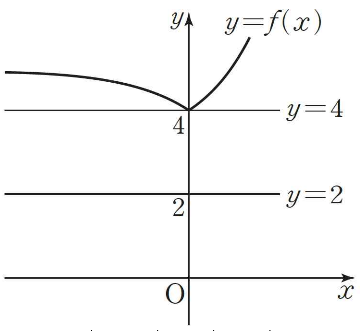
①, ②에서 구하는 순서쌍 $(k,\ m)$의 개수는 $7+2=9$이므로

$a_3=9$

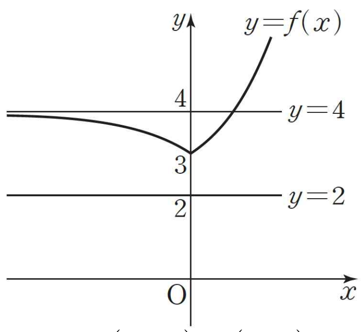
(ⅰ), (ⅱ)에서 $a_1+a_3=10+9=19$

[참고]

(ⅰ)에서 순서쌍 $(k,\ m)$이 $(1,\ 4)$, $(1,\ 3)$인 경우 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



[순서쌍 $(k,\ m)$이 $(1,\ 4)$인 경우]



[순서쌍 $(k,\ m)$이 $(1,\ 3)$인 경우]

TH①. 삼각함수 그래프

출제 : 11번,12번,13번,14번 또는 19번(주관식 마지막 3점), 20번, 21번

[Prediction] 10%

삼각함수와 상수함수의 교점을 활용한 문항이 출제될 가능성이 있다.

2024년 10월 교육청모의고사 19번(3점)

1. 두 상수 a, b $(a>0)$에 대하여 함수 $f(x)=|\sin a\pi x+b|$가 다음 조건을 만족시킬 때, $60(a+b)$의 값을 구하시오.

(가) $f(x)=0$이고 $|x|\leq\frac{1}{a}$인 모든 실수 x의 값의 합은 $\frac{1}{2}$이다.

(나) $f(x)=\frac{2}{5}$이고 $|x|\leq\frac{1}{a}$인 모든 실수 x의 값의 합은 $\frac{3}{4}$이다.

2025학년도 경찰대학교

2. 두 자연수 a, b에 대하여 $0\leq x\leq 2\pi$에서 정의된 함수 $f(x)=a\sin(bx)+a$의 그래프가 직선 $y=2$와 서로 다른 네 점에서 만난다. ab의 최솟값은?

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

2025학년도 6월 평가원모의고사

EBS 연계문항

3. 5 이하의 두 자연수 a, b에 대하여 열린구간 $(0,\ 2\pi)$에서 정의된 함수

$$y = a\sin x + b$$

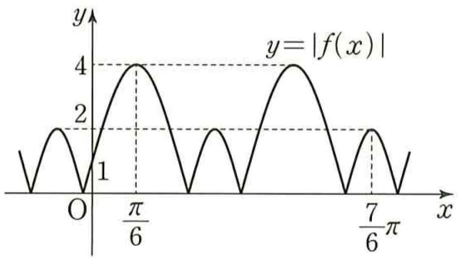
의 그래프가 직선 $x = \pi$와 만나는 점의 집합을 A라 하고, 두 직선 $y = 1$, $y = 3$과 만나는 점의 집합을 각각 B, C라 하자. $n(A \cup B \cup C) = 3$이 되도록 하는 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$에 대하여 $a+b$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M \times m$의 값을 구하시오.

2024년 수능특강 Lv3

2025학년도 6월 평가원모의고사 연계

4. 10보다 작은 두 자연수 a, b에 대하여 $0 < x < 2\pi$에서 함수 $y = a\sin x + b$의 그래프가 세 직선 $y = 1$, $y = 3$, $y = 5$와 만나는 서로 다른 점의 개수를 각각 p, q, r이라 할 때, $p+q+r = 3$이 되도록 하는 a, b의 모든 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 구하시오.

5. 함수 $f(x)=a\sin bx+c$가 있다.
함수 $y=|f(x)|$의 그래프가 그림과 같이 $|f(0)|=1$, $\left|f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right|=4$, $\left|f\left(\frac{7}{6}\pi\right)\right|=2$가 되도록 하는 세 실수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 하자. $M-m$의 값은?



① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

6. 두 실수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=a\sin\pi x+b$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f\left(\frac{b^4}{a^2}\right)$의 값은? (단, $a\neq 0$) [4점]

(가) 닫힌구간 $[1,\ 2]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값과 닫힌구간 $[4,\ 5]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 모두 2이다.
(나) 닫힌구간 $\left[\frac{1}{3},\ \frac{1}{2}\right]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 -1이다.

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[Prediction] 50%

t를 활용한 문항이 출제가 될 수 있다. 삼각함수의 그래프 파트는 EBS문항이 연계될 가능성이 가장 높다.

2025학년도 9월 평가원모의고사

2025 Trend

7. 닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} \sin x-1 & (0\le x<\pi) \\ -\sqrt{2}\sin x-1 & (\pi\le x\le 2\pi) \end{cases}$$

가 있다. $0\le t\le 2\pi$인 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=f(t)$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 모든 t의 값의 합은 $\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

2024년 수능완성

연계 가능성 높음

8. $0<t<2\pi$인 실수 t에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} \cos x-\cos t & (0\le x\le t) \\ \cos t-\cos x & (t<x\le 2\pi) \end{cases}$$

의 최댓값을 $M(t)$, 최솟값을 $m(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |

ㄱ. $M\left(\frac{\pi}{2}\right)-m\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$

ㄴ. $M(t)-m(t)=2$를 만족시키는 실수 t의 값의 범위는 $\frac{\pi}{2}\le t\le \frac{3}{2}\pi$이다.

ㄷ. $M(t)+m(t)=0$을 만족시키는 실수 t의 최댓값과 최솟값의 합은 2π이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄷ

2024년 수능완성

연계 가능성 높음

9. $0 \le t \le 2$인 실수 t에 대하여 x에 대한 이차방정식

$$(x-\sin\pi t)(x+\cos\pi t)=0$$

의 두 실근 중에서 작지 않은 것을 $\alpha(t)$, 크지 않은 것을 $\beta(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

| 보기 |

ㄱ. $\alpha\left(\frac{1}{2}\right) > \frac{1}{2}$

ㄴ. $\alpha(t)=\beta(t)$인 서로 다른 실수 t의 개수는 2이다.

ㄷ. $\alpha(s)=\beta\left(s+\frac{1}{2}\right)$을 만족시키는 실수 $s\left(0 \le s \le \frac{3}{2}\right)$의 최댓값은 $\frac{5}{4}$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

TH②. 삼각함수의 활용

출제 : 10번,11번,12번 또는 20번

[Prediction] 30%

6월, 9월 평가원에서 문장형 문제로 삼각함수 활용 문항이 출제가 되었다. 하지만 수능은 똑같이 나온다고 확신할 수는 없기 때문에 기존에 도형이 나오는 문항도 연습을 해야한다.

2025학년도 6월 평가원모의고사

2025 Trend

10. 다음 조건을 만족시키는 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 9π일 때, 삼각형 ABC의 넓이는?

(가) $3\sin A = 2\sin B$
(나) $\cos B = \cos C$

① $\frac{32}{9}\sqrt{2}$ ② $\frac{40}{9}\sqrt{2}$ ③ $\frac{16}{3}\sqrt{2}$
④ $\frac{56}{9}\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{64}{9}\sqrt{2}$

11. $\angle \mathrm{A} > \dfrac{\pi}{2}$ 인 삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$$\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{2} : 1, \ \overline{\mathrm{AH}} = 2$$

이고, 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 50π일 때, 선분 BH의 길이는?

① 6 ② $\dfrac{25}{4}$ ③ $\dfrac{13}{2}$

④ $\dfrac{27}{4}$ ⑤ 7

12. 삼각형 ABC에서

$$\sin A = \sin C, \ \sin A : \sin B = 2 : 3$$

일 때, $\dfrac{\cos A + \cos B}{\cos C}$ 의 값은?

① $\dfrac{1}{6}$ ② $\dfrac{1}{3}$ ③ $\dfrac{1}{2}$

④ $\dfrac{2}{3}$ ⑤ $\dfrac{5}{6}$

13. 예각삼각형 ABC에 대하여

$$\overline{\mathrm{CA}}^2+\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{BC}}^2+4\overline{\mathrm{CA}},$$
$$\overline{\mathrm{BC}}^2+\overline{\mathrm{CA}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+8\overline{\mathrm{CA}}$$

가 성립할 때, $\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}\cos C}{\overline{\mathrm{AB}}\cos A}$ 의 값을 구하시오.

2024년도 수능특강
2025 Trend

14. 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킬 때, $\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2+\overline{\mathrm{CA}}^2$의 값을 구하시오.

(가) $\sin(B+C)+\sin(A+C)\times\cos(A+B)=0$

(나) 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는 $\dfrac{5}{2}$이다.

15. 다음 조건을 만족시키는 삼각형 ABC에 대하여 등식 $\sin A = k(\sin B - \sin C)$가 성립하도록 하는 양수 k가 존재할 때, k의 값은?

(가) $\cos A \cos B \cos C = 0$
(나) $(\cos A - \cos B)(\cos B - \cos C)(\cos C - \cos A) = 0$

① $\sqrt{2}-1$　② 1　③ $\sqrt{2}$
④ 2　⑤ $\sqrt{2}+1$

2024년도 수능특강
2025 Trend

16. 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\sin A = \cos B$
(나) $\sin A + \sin B = \dfrac{2\sqrt{10}}{5}$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 할 때, $\dfrac{\overline{\mathrm{BC}} \times \overline{\mathrm{CA}}}{R^2}$의 값은?

① 1　② $\dfrac{6}{5}$　③ $\dfrac{7}{5}$
④ $\dfrac{8}{5}$　⑤ $\dfrac{9}{5}$

2024년도 수능특강

2025 Trend

17. 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\sin A = \sin C$ (나) $\cos A + 2\cos B = 3\cos C$

삼각형 ABC의 넓이가 12일 때, 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는?

① $4\sqrt{3}\pi$ ② $\frac{13\sqrt{3}}{3}\pi$ ③ $\frac{14\sqrt{3}}{3}\pi$

④ $5\sqrt{3}\pi$ ⑤ $\frac{16\sqrt{3}}{3}\pi$

[Prediction] 10%

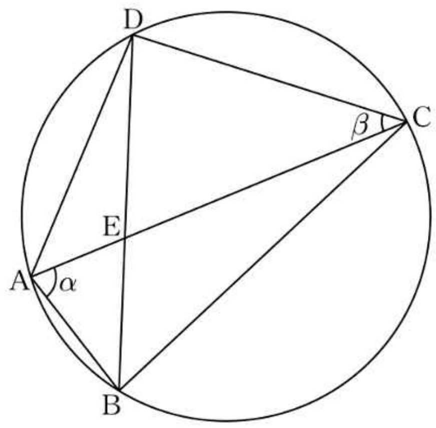
항상 기존의 출제되었던 유형도 준비해두자.

2024년도 10월 교육청모의고사

18. 그림과 같이 한 원에 내접하는 사각형 ABCD에 대하여

$\overline{\mathrm{AB}} = 4,\ \overline{\mathrm{BC}} = 2\sqrt{30},\ \overline{\mathrm{CD}} = 8$

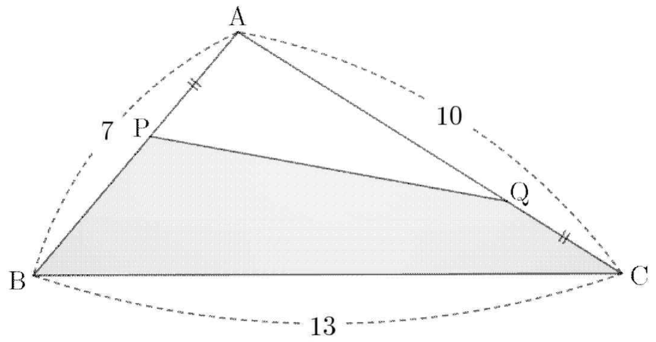
이다. $\angle \mathrm{BAC} = \alpha,\ \angle \mathrm{ACD} = \beta$라 할 때, $\cos(\alpha+\beta) = -\frac{5}{12}$이다. 두 선분 AC와 BD의 교점을 E라 할 때, 선분 AE의 길이는? $\left(단,\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2},\ 0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$



① $\sqrt{6}$ ② $\frac{\sqrt{26}}{2}$ ③ $\sqrt{7}$

④ $\frac{\sqrt{30}}{2}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

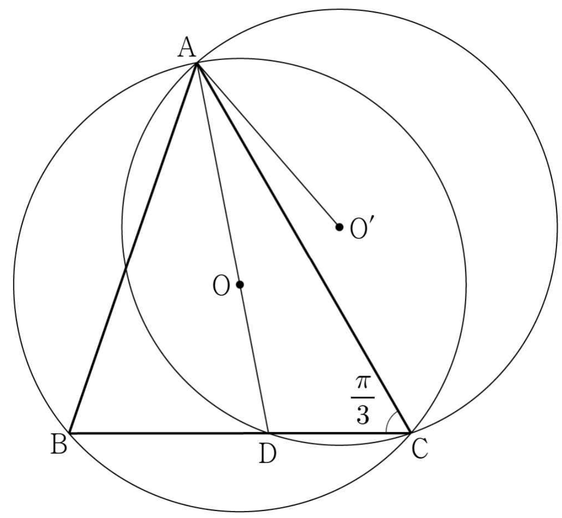
19. 그림과 같이 $\overline{AB}=7$, $\overline{BC}=13$, $\overline{CA}=10$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AB 위의 점 P와 선분 AC 위의 점 Q를 $\overline{AP}=\overline{CQ}$이고 사각형 PBCQ의 넓이가 $14\sqrt{3}$이 되도록 잡을 때, $\overline{PQ}^2$의 값을 구하시오.



20. 그림과 같이

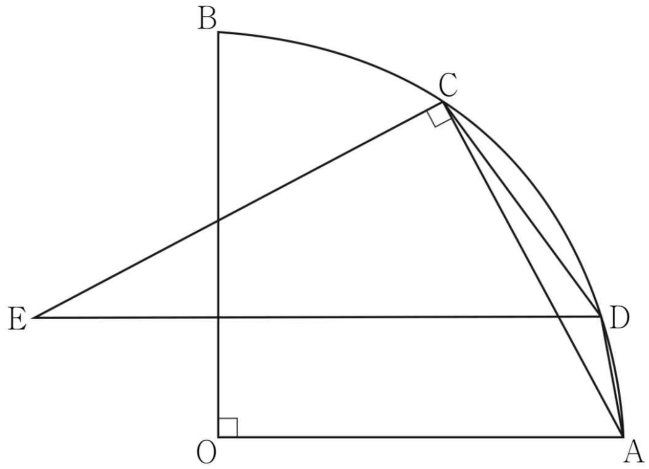
$$\overline{BC}=\frac{36\sqrt{7}}{7},\ \sin(\angle BAC)=\frac{2\sqrt{7}}{7},\ \angle ACB=\frac{\pi}{3}$$

인 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 외접원의 중심을 O, 직선 AO가 변 BC와 만나는 점을 D라 하자. 삼각형 ADC의 외접원의 중심을 O′이라 할 때, $\overline{AO'}=5\sqrt{3}$이다. $\overline{OO'}^2$의 값은? $\left(\text{단, } 0<\angle BAC<\frac{\pi}{2}\right)$



① 21 ② $\frac{91}{4}$ ③ $\frac{49}{2}$ ④ $\frac{105}{4}$ ⑤ 28

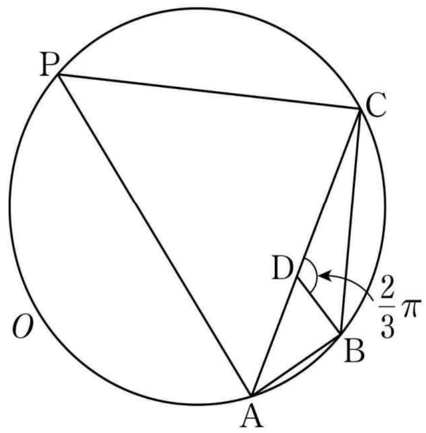
21.. 그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 6이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB위에 점 C를 $\overline{\mathrm{AC}}=4\sqrt{2}$가 되도록 잡는다. 호 AC 위의 한 점 D에 대하여 점 D를 지나고 선분 OA에 평행한 직선과 점 C를 지나고 선분 AC에 수직인 직선이 만나는 점을 E라 하자. 삼각형 CED의 외접원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{2}$일Eo, $\overline{\mathrm{AD}}=p+q\sqrt{7}$을 만족시키는 두 유리수 p, q에 대하여 $9\times\left|p\times q\right|$의 값을 구하시오.(단, 점 D는 점 A도 아니고, 점 C도 아니다.)[21]



22.. 그림과 같이

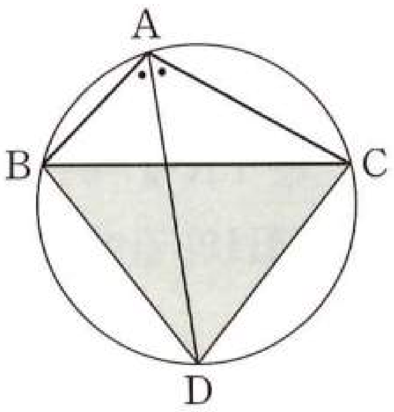
$$2\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}},\ \cos(\angle\mathrm{ABC})=-\frac{5}{8}$$

인 삼각형 ABC의 외접원을 O라 하자. 원 O 위의 점 P에 대하여 삼각형 PAC의 넓이가 최대가 되도록 하는 점 P를 Q라 할 때, $\overline{\mathrm{QA}}=6\sqrt{10}$이다. 선분 AC 위의 점 D에 대하여 $\angle\mathrm{CDB}=\frac{2}{3}\pi$일 때, 삼각형 CDB의 외접원의 반지름의 길이는?



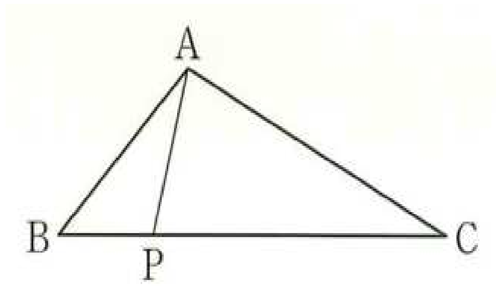
① $3\sqrt{3}$ ② $4\sqrt{3}$ ③ $3\sqrt{6}$
④ $5\sqrt{3}$ ⑤ $4\sqrt{6}$

23. 그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=4$, $\overline{CA}=3$인 삼각형 ABC에서 $\angle$BAC의 이등분선이 삼각형 ABC의 외접원과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 D라 하자. 삼각형 BDC의 넓이는?



① $\sqrt{15}$　② $\frac{7\sqrt{15}}{6}$　③ $\frac{4\sqrt{15}}{3}$
④ $\frac{3\sqrt{15}}{2}$　⑤ $\frac{5\sqrt{15}}{3}$

24. 그림과 같이 $\overline{BC}=3\sqrt{2}$, $\overline{CA}=\sqrt{10}$, $\cos C=\frac{2\sqrt{5}}{5}$인 삼각형 ABC에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

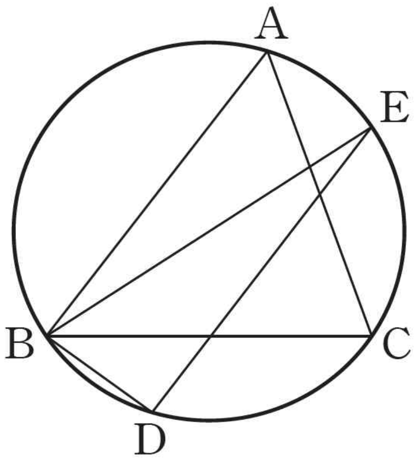


| 보기 |

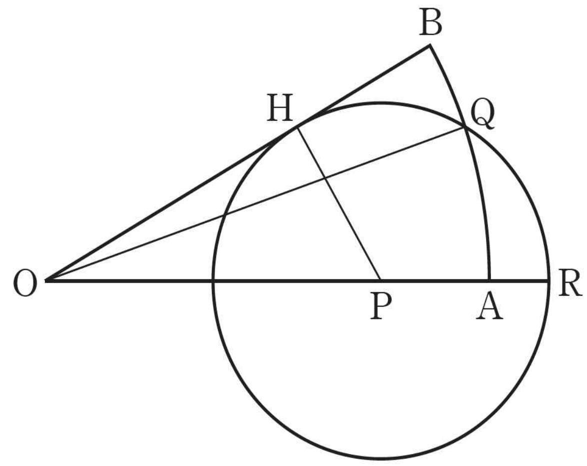
ㄱ. $\overline{AB}=2$
ㄴ. 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는 5π이다.
ㄷ. 선분 BC 위를 움직이는 점 P에 대하여
$\frac{\overline{BP}\times\overline{CP}}{\sin(\angle PAB)\times\sin(\angle CAP)}$의 최솟값은 $2\sqrt{10}$이다.
(단, 점 P는 두 점 B, C와 일치하지 않는다.)

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

25. 그림과 같이 지름의 길이가 6인 원에 내접하고 $\overline{BC}=5$인 삼각형 ABC가 있다. $\overline{AB}=\overline{DE}$, $\overline{AB}\,/\!/\,\overline{DE}$를 만족시키는 원 위의 두 점 D, E에 대하여 $\cos(\angle ACB)>0$, $\cos(\angle EDB)=\frac{1}{3}$일 때, $\overline{AC}=p+q\sqrt{22}$이다. $9pq$의 값을 구하시오. (단, 두 직선 AD, BE는 한 점에서 만나고, p와 q는 유리수이다.)

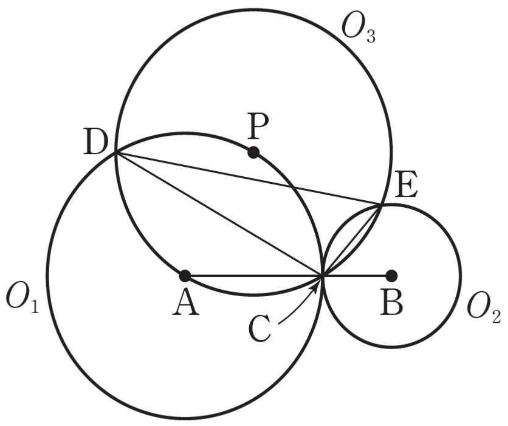


26. 그림과 같이 반지름의 길이가 4이고, 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$인 부채꼴 OAB가 있다. 선분 OA 위의 점 P를 중심으로 하고 직선 OB와 점 H에서 접하는 원이 부채꼴 OAB의 호 AB와 만나는 점을 Q라 하고, 이 원이 직선 OA와 만나는 점 중 A에 가까운 점을 R이라 하자. 점 Q가 부채꼴 PRH의 호 RH를 이등분할 때, 부채꼴 PRH의 넓이는? $\left(\text{단, } \frac{8}{3}<\overline{OP}<4\right)$



① $\frac{2}{3}\pi$　② $\frac{5}{7}\pi$　③ $\frac{16}{21}\pi$　④ $\frac{17}{21}\pi$　⑤ $\frac{6}{7}\pi$

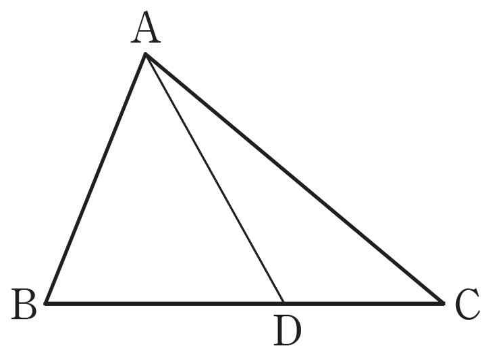
27. 그림과 같이 길이가 3인 선분 AB에 대하여 중심이 A이고 반지름의 길이가 2인 원 O_1과 중심이 B이고 반지름의 길이가 1인 원 O_2가 만나는 점을 C라 하자. 원 O_1 위의 점 P를 중심으로 하고 두 점 A, C를 지나는 원 O_3이 원 O_1과 만나는 점 중 C가 아닌 점을 D라 하고, 원 O_3이 원 O_2와 만나는 점 중 C가 아닌 점을 E라 할 때, 삼각형 EDC에서 $\sin(\angle \mathrm{EDC})$의 값은?



① $\frac{\sqrt{17}}{14}$ ② $\frac{\sqrt{19}}{14}$ ③ $\frac{\sqrt{21}}{14}$
④ $\frac{\sqrt{23}}{14}$ ⑤ $\frac{5}{14}$

New

28. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=2:3$인 삼각형 ABC에서 선분 BC를 $3:2$로 내분하는 점을 D라 하자. $\frac{\cos(\angle \mathrm{ABD})}{\cos(\angle \mathrm{ACD})}=\frac{1}{2}$일 때, $\frac{\overline{\mathrm{AD}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$의 값은?

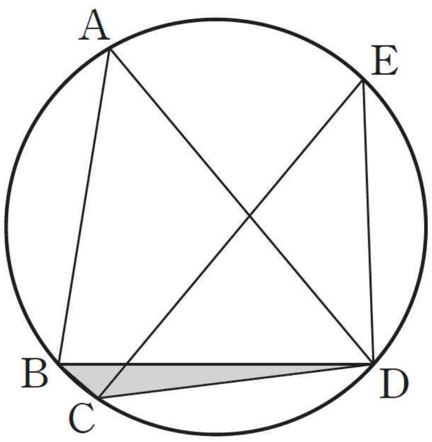


① $\frac{\sqrt{95}}{10}$ ② 1 ③ $\frac{\sqrt{105}}{10}$
④ $\frac{\sqrt{110}}{10}$ ⑤ $\frac{\sqrt{115}}{10}$

29. 그림과 같이 반지름의 길이가 4인 원 위에 5개의 점 A, B, C, D, E가 있다.

$$\sin(\angle \mathrm{BAD})=\frac{3}{4},\ \sin(\angle \mathrm{CED})=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

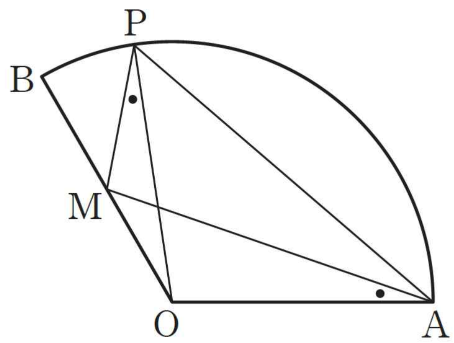
일 때, 삼각형 BCD의 넓이는? (단, 점 C는 호 BD중 길이가 짧은 호 위에 있고, $0<\angle \mathrm{BAD}<\frac{\pi}{2}$, $0<\angle \mathrm{CED}<\frac{\pi}{2}$이다.) [4점]



① $\frac{3\sqrt{7}}{8}$ ② $\frac{\sqrt{7}}{2}$ ③ $\frac{5\sqrt{7}}{8}$
④ $\frac{3\sqrt{7}}{4}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{7}}{8}$

2024년 수능완성

30. 그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 2, 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$인 부채꼴 OAB가 있다. 선분 OB의 중점 M가 호 AB 위의 점 중에서 A가 아닌 점 P에 대하여 $\angle \mathrm{OAM}=\angle \mathrm{OPM}$일 때, 삼각형 PMA의 둘레의 길이는? [4점]

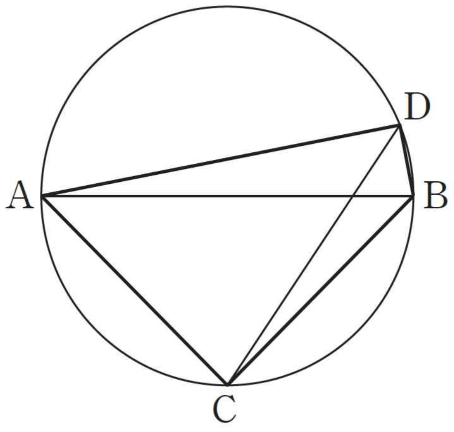


① $\frac{17\sqrt{7}}{7}$ ② $\frac{18\sqrt{7}}{7}$ ③ $\frac{19\sqrt{7}}{7}$
④ $\frac{20\sqrt{7}}{7}$ ⑤ $3\sqrt{7}$

31. 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 원에 내접하는 사각형 ABCD가 있다.

$$\overline{AB}=4,\ \overline{AC}=\overline{BC},\ \overline{CD}=3$$

일 때, 선분 BD의 길이는? (단, $\overline{AD}>\overline{BD}$) [4점]



① $\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{14}}{2}$　② $\frac{2\sqrt{5}-\sqrt{14}}{2}$

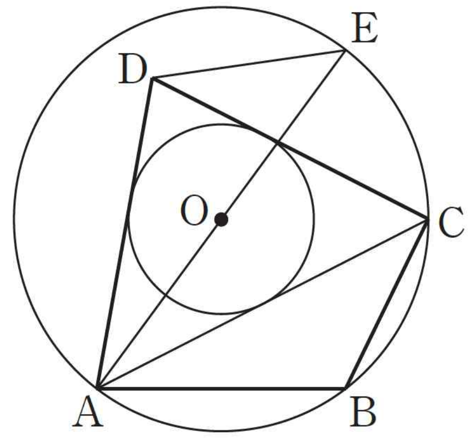
③ $\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{2}$　④ $\frac{2\sqrt{5}-2\sqrt{3}}{2}$

⑤ $\frac{2\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$

2024년 수능완성

32. 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=\sqrt{5}$,

$\cos(\angle ABC)=-\frac{\sqrt{5}}{5}$인 사각형 ABCD에 대하여 삼각형 ABC의 외접원의 중심을 O라 하고, 직선 AO와 이 외접원이 만나는 점 중 점 A가 아닌 점을 E라 하자. 삼각형 ACD의 내접원의 중심이 점 O와 일치할 때, 선분 DE의 길이는? [4점]



① $\frac{4\sqrt{2}}{3}$　② $\frac{5\sqrt{2}}{3}$　③ $\frac{4\sqrt{5}}{3}$

④ $\frac{5\sqrt{5}}{3}$　⑤ $2\sqrt{5}$

1. [정답] 84

[해설]

(가)에서 $f(x)=0$ 이고 $-\frac{1}{a}\le x\le\frac{1}{a}$ 인 모든 실수 x의 값의 합이 $\frac{1}{2}$ 이 되기 위해서는

$\frac{1}{2a}=\frac{1}{2}$ 또는 $\frac{1}{a}=\frac{1}{2}$, $a=1$ 또는 $a=2$ 이다.

$a=1$ 이면 $b=-1$ 이고 $-\frac{1}{a}\le x\le\frac{1}{a}$ 에서 $f(x)=\frac{2}{5}$ 인 모든 실수 x의 값의 합이 1이 되어 (나)를 만족시키지 않는다.

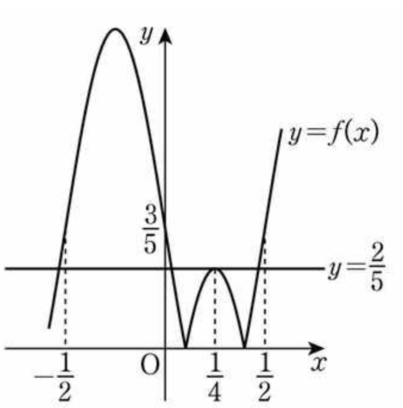
$a=2$ 이면 (나)에 의해 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=\frac{2}{5}$ 가 세 점에서 만나야 하므로

$f\left(\frac{1}{4}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{2}+b\right|=|1+b|=\frac{2}{5}$

$b=-\frac{7}{5}$ 이면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x축이 만나지 않으므로

$b=-\frac{3}{5}$

따라서 $60(a+b)=60\left(2-\frac{3}{5}\right)=60\times\frac{7}{5}=84$



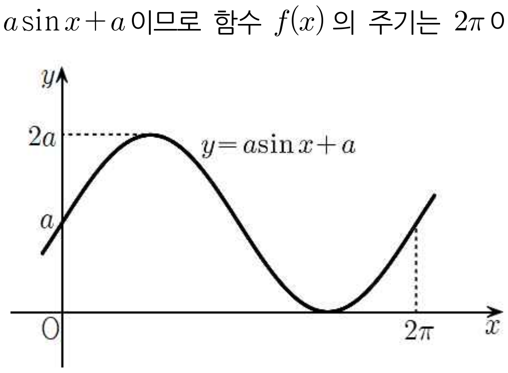
2. [정답] ①

[해설]

$-1\le\sin bx\le 1$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 0이고 최댓값은 $2a$ 이다. 이때 b가 자연수이므로

(i) $b=1$ 일 때

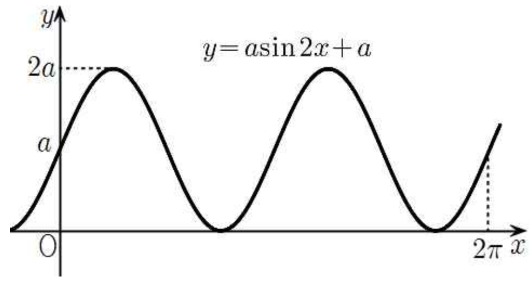
$f(x)=a\sin x+a$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 주기는 2π 이다.



그림에서 $0\le x\le 2\pi$ 일 때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=2$ 는 서로 다른 네 점에서 만나지 않는다.

(ii) $b=2$ 일 때

$f(x)=a\sin 2x+a$ 이고 $f(x)$ 의 주기는 π 이다.



그림에서 $0\le x\le 2\pi$ 일 때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=2$ 의 교점이 4개이려면

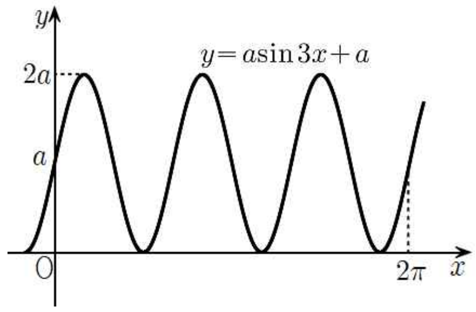
$a\ne 2,\ 0<2<2a$

이어야 한다. 즉, 자연수 a의 최솟값은 3이므로 ab의 최솟값은

$3\times 2=6$

(iii) $b=3$ 일 때

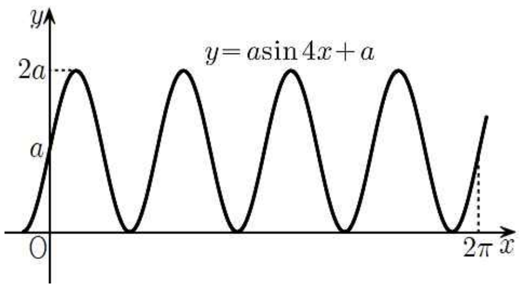
$f(x)=a\sin 3x+a$ 이고 $f(x)$ 의 주기는 $\frac{2}{3}\pi$ 이다.



그림에서 $0\le x\le 2\pi$ 일 때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=2$ 는 서로 다른 네 점에서 만나지 않는다.

(iv) $b=4$ 일 때

$f(x)=a\sin 4x+a$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 주기는 $\frac{1}{2}\pi$ 이다.



그림에서 $0\le x\le 2\pi$ 일 때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=2$ 의 교점이 4개이려면

$2a=2,\ a=1$

이어야 한다. 즉, 자연수 a의 최솟값은 1이므로 ab의 최솟값은

$1\times 4=4$

(v) $b\ge 5$ 일 때

$0\le x\le 2\pi$ 일 때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=2$ 는 서로 다른 네 점에서 만나지 않는다.

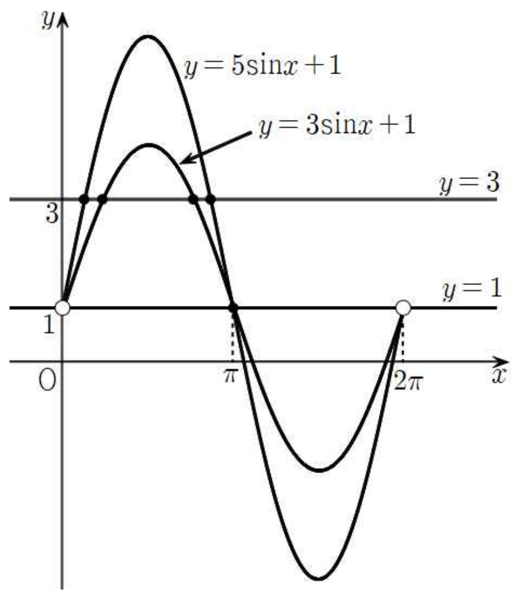
이상에서 ab의 최솟값은 4이다.

3. [정답] 24

[출처]	2024년(2025학년도) 평가원 고3공통 06월 공통범위 20 [4.00점]

[해설]

(i) $b=1$일 때

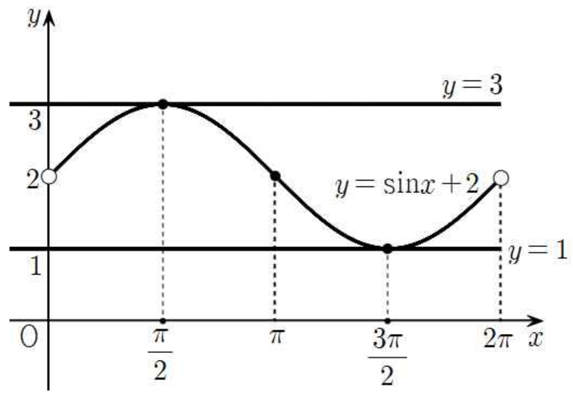


$n(A\cup B\cup C)=3$을 만족하는 a의 값의 범위는

$3\le a\le 5$

$\therefore\ 4\le a+b\le 6$

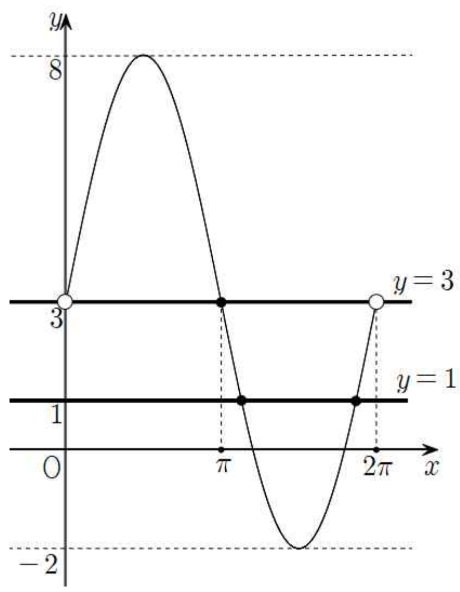
(ii) $b=2$일 때



$n(A\cup B\cup C)=3$을 만족하는 a의 값은 1이다.

$\therefore\ a+b=1+2=3$

(iii) $b=3$일 때

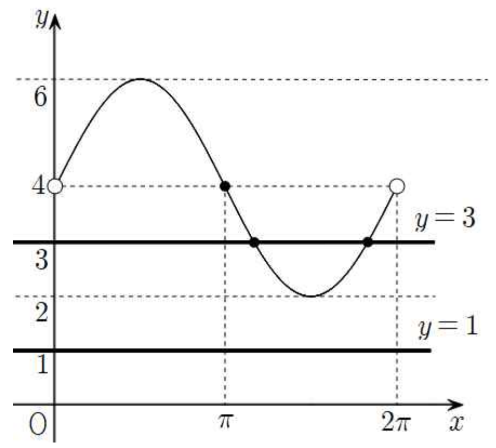


$n(A\cup B\cup C)=3$을 만족하는 a의 값의 범위는

$3\le a\le 5$

$\therefore\ 6\le a+b\le 8$

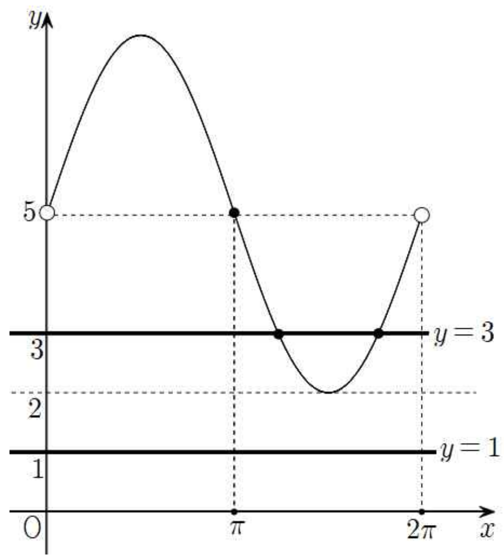
(iv) $b=4$일 때



$n(A\cup B\cup C)=3$을 만족하는 a의 값은 2이므로

$a+b=6$

(v) $b=5$일 때



$n(A\cup B\cup C)$를 만족하는 a의 값은 3이므로

$a+b=8$

이상에서 $m=3,\ M=8$

$\therefore\ M\times m=8\times 3=24$

4. 정답 7

풀이

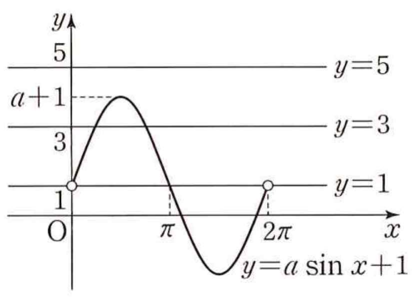
$a,\ b$가 자연수이므로 $0<x<2\pi$에서

함수 $y=a\sin x+b$는 $x=\dfrac{\pi}{2}$에서 최댓값 $a+b$를 갖고,

$x=\dfrac{3}{2}\pi$에서 최솟값 $-a+b$를 갖는다.

b의 값에 따라 $p+q+r=3$이 되도록 하는 10보다 작은 두 자연수 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$는 다음과 같다.

(i) $b=1$일 때

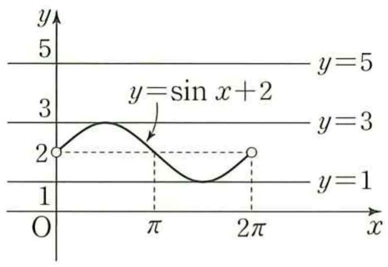


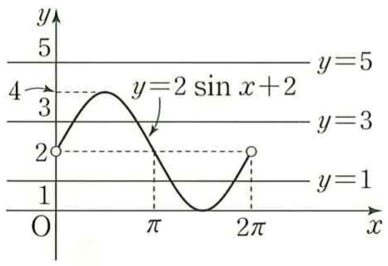
$p=1,\ q=2,\ r=0$, 즉 $a+b=a+1=4$이어야 하므로

$a=3$

즉, 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(3,\ 1)$

(ii) $b=2$일 때



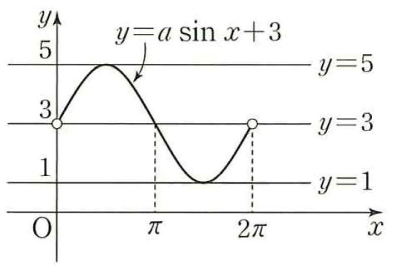


$a=1$이면 $p=1$, $q=1$, $r=0$이고

$a \geq 2$이면 $p=2$, $q=2$, $r \geq 0$이므로

$p+q+r=3$을 만족시키는 a의 값이 존재하지 않는다.

(iii) $b=3$일 때



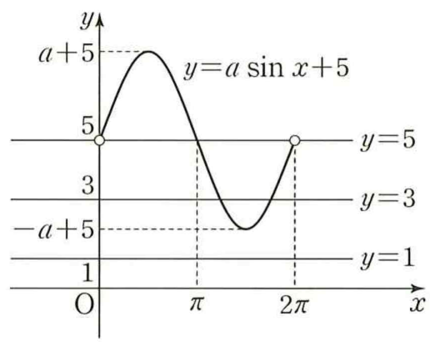
$p=q=r=1$, 즉 $a+b=a+3=5$이어야 하므로 $a=2$

즉, 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(2,\ 3)$

(iv) $b=4$일 때

(ii)의 $b=2$일 때와 마찬가지로 조건을 만족시키는 a의 값이 존재하지 않는다.

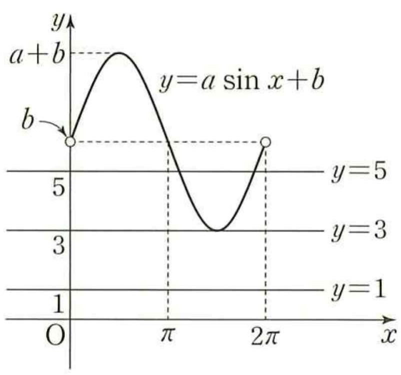
(v) $b=5$일 때



$p=0$, $q=2$, $r=1$, 즉 $-a+b=-a+5=2$이어야 하므로 $a=3$

즉, 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(3,\ 5)$

(vi) $6 \leq b \leq 10$일 때



$p=0$, $q=1$, $r=2$, 즉 $-a+b=3$이어야 하므로

$a=b-3$이고 이를 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(3,\ 6)$, $(4,\ 7)$, $(5,\ 8)$, $(6,\ 9)$

(i)~(vi)에 의하여 구하는 모든 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(3,\ 1)$, $(2,\ 3)$, $(3,\ 5)$, $(3,\ 6)$, $(4,\ 7)$, $(5,\ 8)$, $(6,\ 9)$이고 그 개수는 7이다.

5. **정답** ④

풀이

$\frac{\pi}{6}<x<\frac{7}{6}\pi$에서 방정식 $|f(x)|=4$의 근, 즉 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=4$가 만나는 점의 x좌표를 α라 하면

$\alpha-\frac{\pi}{6}=2\left(\frac{7}{6}\pi-\alpha\right)$

이므로 $\alpha=\frac{5}{6}\pi$

따라서 함수 $f(x)$의 주기는

$\alpha-\frac{\pi}{6}=\frac{5}{6}\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{2}{3}\pi$

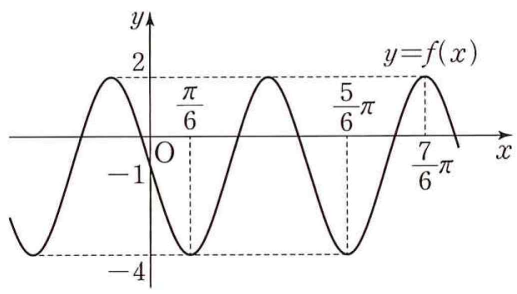
함수 $f(x)=a\sin bx+c$의 주기는 $\frac{2\pi}{|b|}$이므로

$\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2}{3}\pi$

$|b|=3$

한편, $|f(0)|=1$에서 $|c|=1$, 즉 $c=-1$ 또는 $c=1$

(i) $c=-1$일 때



$f(x)=a\sin bx-1$의 최댓값이 2이므로

$|a|-1=2$, $|a|=3$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=-3\sin 3x$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로

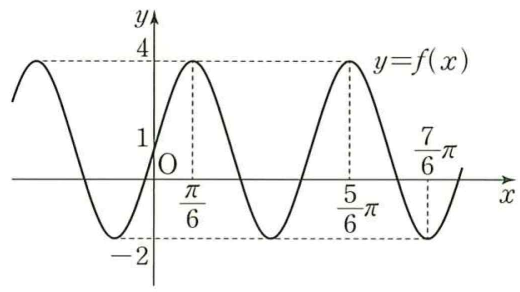
$f(x)=-3\sin 3x-1$

이때 $|a|=|b|=3$이고 $-3\sin 3x=3\sin(-3x)$이므로

$a=-3$, $b=3$ 또는 $a=3$, $b=-3$

따라서 $a+b=0$이므로 $a+b+c$의 값은 -1이다.

(ii) $c=1$일 때



$f(x)=a\sin bx+1$의 최댓값이 4이므로

$|a|+1=4$, $|a|=3$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=3\sin 3x$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로

$f(x)=3\sin 3x+1$

이때 $|a|=|b|=3$ 이고 $3\sin 3x=-3\sin(-3x)$이므로

$a=b=3$ 또는 $a=b=-3$

따라서 $a+b+c$의 값은 $3+3+1=7$ 또는

$-3+(-3)+1=-5$이다.

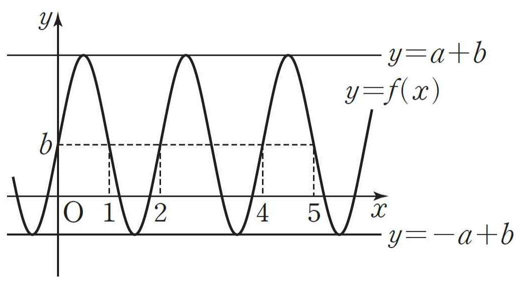
(ⅰ), (ⅱ)에서 $a+b+c$의 최댓값과 최솟값은 각각 $M=7$, $m=-5$이므로

$M-m=7-(-5)=12$

6. 정답 ⑤

함수 $f(x)=a\sin\pi x+b$의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi}=2$이고 최댓값은 $|a|+b$, 최솟값은 $-|a|+b$이다.

(ⅰ) $a>0$인 경우



닫힌구간 $[1,\ 2]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $-a+b$이고,

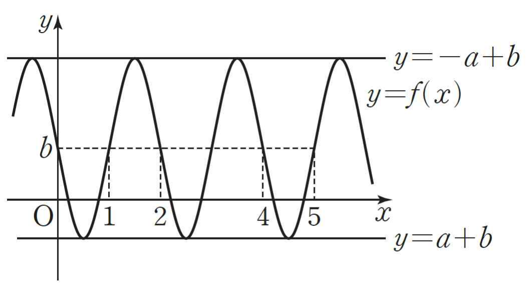
닫힌구간 $[4,\ 5]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $a+b$이다.

이때 닫힌구간 $[1,\ 2]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값과 닫힌구간 $[4,\ 5]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 모두 2이므로

$-a+b=a+b=2$

즉, $a=0$이므로 $a>0$이라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $a<0$인 경우



닫힌구간 $[1,\ 2]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 b이고,

닫힌구간 $[4,\ 5]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 b이다.

이때 닫힌구간 $[1,\ 2]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값과 닫힌구간 $[4,\ 5]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 모두 2이므로

$b=2$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $a<0$, $b=2$

닫힌구간 $\left[\frac{1}{3},\ \frac{1}{2}\right]$에서 함수 $f(x)=a\sin\pi x+2$는 $x=\frac{1}{3}$일 때 최댓값 -1을 가지므로

$f\left(\frac{1}{3}\right)=a\sin\frac{\pi}{3}+2=\frac{\sqrt{3}}{2}a+2=-1$

$a=\frac{2}{\sqrt{3}}\times(-3)=-2\sqrt{3}$

따라서

$f\left(\frac{b^4}{a^2}\right)=f\left(\frac{4}{3}\right)$

$=-2\sqrt{3}\sin\frac{4}{3}\pi+2$

$=-2\sqrt{3}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2$

$=5$

7. [정답] 15

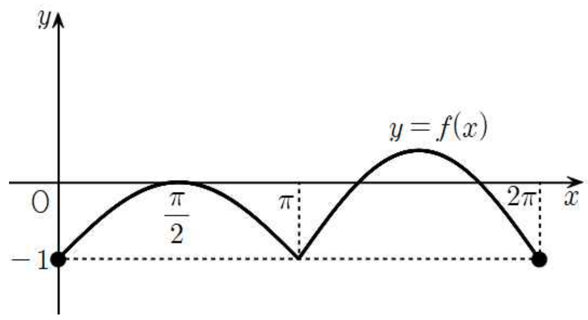
[해설]

닫힌구간 $[0,\ 2\pi]$ 에서 정의된 함수

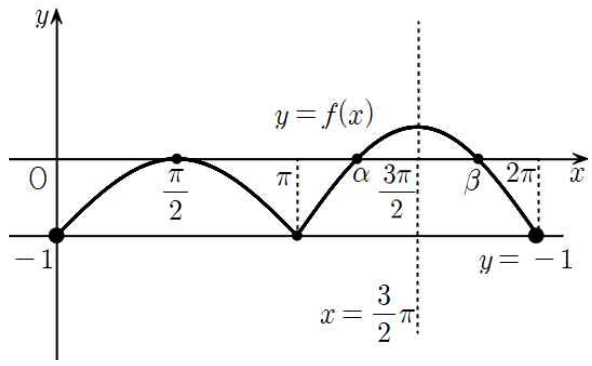
$$f(x)=\begin{cases}\sin x-1 & (0\le x<\pi)\\ -\sqrt{2}\sin x-1 & (\pi\le x\le 2\pi)\end{cases}$$

에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 $0\le x<\pi$에서 $y=\sin x$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이고

$\pi\le x\le 2\pi$에서 $y=\sqrt{2}\sin x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



따라서 방정식 $f(x)=f(t)$ 의 서로 다른 실근은 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=f(t)$ 의 교점의 x좌표이다.



교점의 개수가 3인 경우는 $f(t)=0$ 또는 $f(t)=-1$

$f(t)=-1$ 에서 $t=0$ 또는 $t=\pi$ 또는 $t=2\pi$

$\pi\le x\le 2\pi$에서 $-\sqrt{2}\sin x-1=0$을 만족시키는 두 근을 α, β라 하면 $f(t)=0$ 에서

$t=\frac{\pi}{2}$ 또는 $t=\alpha$ 또는 $t=\beta$

이때 $\alpha+\beta=3\pi$이므로 모든 t의 값의 합은

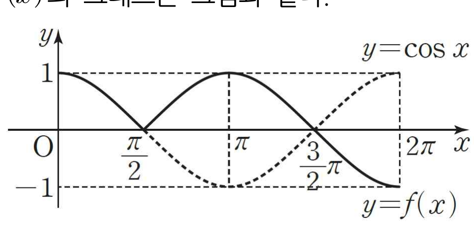
$0+\frac{\pi}{2}+\pi+2\pi+3\pi=\frac{13}{2}\pi$

$\therefore\ p+q=2+13=15$

8. 정답 ⑤

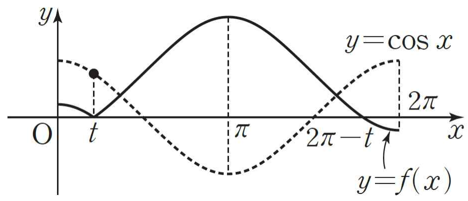
ㄱ. $t=\frac{\pi}{2}$일 때 $f(x)=\begin{cases}\cos x & \left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)\\ -\cos x & \left(\frac{\pi}{2}\le x\le 2\pi\right)\end{cases}$ 이므로 함수

$y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



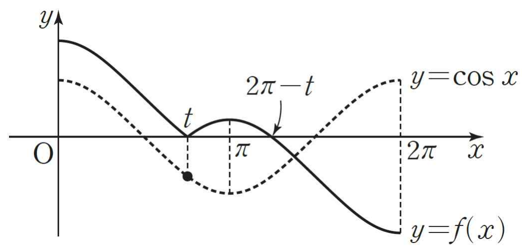
$M\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, $m\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$이므로 $M\left(\frac{\pi}{2}\right)-m\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$ (참)

ㄴ. (ⅰ) $0 < t \le \frac{\pi}{2}$일 때



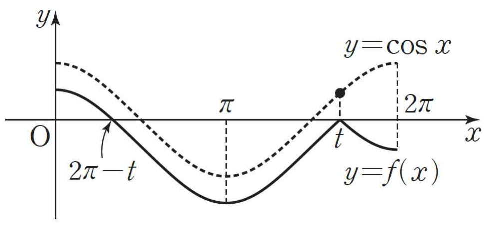
$M(t)=f(\pi)=\cos t-\cos\pi=\cos t+1$,
$m(t)=f(2\pi)=\cos t-\cos 2\pi=\cos t-1$
이므로 $M(t)-m(t)=2$

(ⅱ) $\frac{\pi}{2} < t < \frac{3}{2}\pi$일 때



$M(t)=f(0)=\cos 0-\cos t=1-\cos t$,
$m(t)=f(2\pi)=\cos t-\cos 2\pi=\cos t-1$
이므로 $M(t)-m(t)=2-2\cos t$

(ⅲ) $\frac{3}{2}\pi \le t < 2\pi$일 때



$M(t)=f(0)=\cos 0-\cos t=1-\cos t$,
$m(t)=f(\pi)=\cos\pi-\cos t=-1-\cos t$
이므로 $M(t)-m(t)=2$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $M(t)-m(t)=2$를 만족시키는 실수 t의 값의 범위는 $0 < t \le \frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{3}{2}\pi \le t < 2\pi$ (거짓)

ㄷ. ㄴ에서

$0 < t \le \frac{\pi}{2}$일 때, $M(t)+m(t)=2\cos t$

$\frac{\pi}{2} < t < \frac{3}{2}\pi$일 때, $M(t)+m(t)=0$

$\frac{3}{2}\pi \le t < 2\pi$일 때, $M(t)+m(t)=-2\cos t$

이므로 $\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{3}{2}\pi$일 때, $M(t)+m(t)=0$

따라서 $M(t)+m(t)=0$을 만족시키는 실수 t의 최솟값은 $\frac{\pi}{2}$이고 최댓값은 $\frac{3}{2}\pi$이므로 그 합은 2π이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

9. **정답** ③

ㄱ. $t=\frac{1}{2}$일 때, $\left(x-\sin\frac{\pi}{2}\right)\left(x+\cos\frac{\pi}{2}\right)=0$

즉, 이차방정식 $x(x-1)=0$의 두 실근은 0, 1이므로

$\alpha\left(\frac{1}{2}\right)=1$, $\beta\left(\frac{1}{2}\right)=0$

따라서 $\alpha\left(\frac{1}{2}\right) > \frac{1}{2}$ (참)

ㄴ. 이차방정식 $(x-\sin\pi t)(x+\cos\pi t)=0$의 실근은
$x=\sin\pi t$ 또는 $x=-\cos\pi t$
$\sin\pi t=-\cos\pi t$ 즉, $\tan\pi t=-1$에서
$0 \le t \le 2$이므로 $\pi t=\frac{3}{4}\pi$ 또는 $\pi t=\frac{7}{4}\pi$

즉, $t=\frac{3}{4}$ 또는 $t=\frac{7}{4}$

따라서 $\alpha(t)=\beta(t)$를 만족시키는 서로 다른 실수 t의 개수는 2이다. (참)

ㄷ. $0 \le t \le \frac{3}{4}$ 또는 $\frac{7}{4} \le t \le 2$일 때, $\sin\pi t \ge -\cos\pi t$이므로

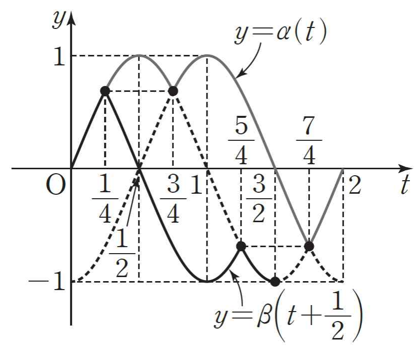
$\alpha(t)=\sin\pi t$, $\beta(t)=-\cos\pi t$

$\frac{3}{4} < t < \frac{7}{4}$일 때, $\sin\pi t < -\cos\pi t$이므로

$\alpha(t)=-\cos\pi t$, $\beta(t)=\sin\pi t$

따라서 $\alpha(t)=\begin{cases}\sin\pi t & \left(0 \le t \le \frac{3}{4} \text{ 또는 } \frac{7}{4} \le t \le 2\right)\\ -\cos\pi t & \left(\frac{3}{4} < t < \frac{7}{4}\right)\end{cases}$

$\beta(t)=\begin{cases}-\cos\pi t & \left(0 \le t \le \frac{3}{4} \text{ 또는 } \frac{7}{4} \le t \le 2\right)\\ \sin\pi t & \left(\frac{3}{4} < t < \frac{7}{4}\right)\end{cases}$



(ⅰ) $0 \le s \le \frac{1}{4}$일 때, $\frac{1}{2} \le s+\frac{1}{2} \le \frac{3}{4}$이므로

$$\begin{aligned}\alpha(s)-\beta\left(s+\frac{1}{2}\right)&=\sin\pi s-\left\{-\cos\pi\left(s+\frac{1}{2}\right)\right\}\\&=\sin\pi s+\cos\left(\pi s+\frac{\pi}{2}\right)\\&=\sin\pi s-\sin\pi s\\&=0\end{aligned}$$

(ⅱ) $\frac{1}{4} < s \le \frac{3}{4}$일 때, $\frac{3}{4} < s+\frac{1}{2} \le \frac{5}{4}$이므로

$$\begin{aligned}\alpha(s)-\beta\left(s+\frac{1}{2}\right)&=\sin\pi s-\sin\pi\left(s+\frac{1}{2}\right)\\&=\sin\pi s-\cos\pi s > 0\end{aligned}$$

(ⅲ) $\frac{3}{4} < s < \frac{5}{4}$일 때, $\frac{5}{4} < s+\frac{1}{2} < \frac{7}{4}$이므로

$$\begin{aligned}\alpha(s)-\beta\left(s+\frac{1}{2}\right)&=-\cos\pi s-\sin\pi\left(s+\frac{1}{2}\right)\\&=-\cos\pi s-\cos\pi s\\&=-2\cos\pi s > 0\end{aligned}$$

(iv) $\frac{5}{4} \le s \le \frac{3}{2}$일 때, $\frac{7}{4} \le s+\frac{1}{2} \le 2$이므로

$$\alpha(s)-\beta\left(s+\frac{1}{2}\right)=-\cos\pi s-\left\{-\cos\pi\left(s+\frac{1}{2}\right)\right\}$$
$$=-\cos\pi s+\cos\left(\pi s+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=-\cos\pi s-\sin\pi s>0$$

따라서 $\alpha(s)=\beta\left(s+\frac{1}{2}\right)$를 만족시키는 실수 $s\left(0\le s\le\frac{3}{2}\right)$의 범위는 $0\le s\le\frac{1}{4}$이므로 그 최댓값은 $\frac{1}{4}$이다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ 이다.

10. [정답] ⑤

[출처] 2024년(2025학년도) 평가원 고3공통 06월 공통범위 10 [4.00점]

[해설]

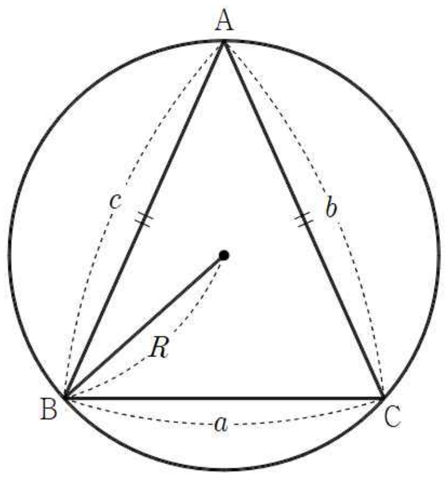
삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 9π이므로 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 $R=3$

조건 (가)에서 $3\sin A=2\sin B$이므로

$$\frac{3a}{2R}=\frac{2b}{2R} \quad \therefore\ 3a=2b$$

조건 (나)에서 $\cos B=\cos C$ 이므로

$$\angle B=\angle C \quad \therefore\ b=c$$



삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b^2+b^2-\left(\frac{2}{3}b\right)^2}{2b^2}=\frac{7}{9}$$

$$\sin A=\sqrt{1-\left(\frac{7}{9}\right)^2}=\frac{4\sqrt{2}}{9}$$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

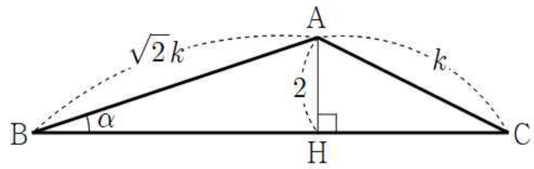
$$\frac{a}{\sin A}=2R,\quad a=2\times3\times\frac{4\sqrt{2}}{9}=\frac{8\sqrt{2}}{3}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}\times b\times c\times\sin A$$
$$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{2}a\right)\times\left(\frac{3}{2}a\right)\times\frac{4\sqrt{2}}{9}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}a^2$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(\frac{8\sqrt{2}}{3}\right)^2$$
$$=\frac{64\sqrt{2}}{9}$$

11. [정답] ①

[해설]



삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 50π이므로 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 $R=5\sqrt{2}$

$\overline{AB}=\sqrt{2}k$, $\overline{AC}=k\ (k>0)$으로 놓고 $\angle ABC=\alpha$라 하면 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{k}{\sin\alpha}=2R=10\sqrt{2},\quad \sin\alpha=\frac{k}{10\sqrt{2}} \quad \cdots\cdots ㉠$$

직각삼각형 ABH에서 $\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{2}k}$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$$\frac{k}{10\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}k},\quad k^2=20$$

직각삼각형 ABH에서 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{BH}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{AH}^2}=\sqrt{2k^2-4}=6$$

12. 정답 ⑤

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

즉, $\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$

$\sin A=\sin C$에서 $a=c$

$\sin A:\sin B=2:3$에서 $a:b=2:3$

$a=2k$, $b=3k$, $c=2k\ (k>0)$으로 놓으면 코사인법칙에 의하여

$$\cos A=\frac{(3k)^2+(2k)^2-(2k)^2}{2\times3k\times2k}=\frac{3}{4}$$

$$\cos B=\frac{(2k)^2+(2k)^2-(3k)^2}{2\times2k\times2k}=-\frac{1}{8}$$

$$\cos C=\cos A=\frac{3}{4}$$

$$\frac{\cos A+\cos B}{\cos C}=\frac{\frac{3}{4}-\frac{1}{8}}{\frac{3}{4}}=\frac{5}{6}$$

13. 정답 2

풀이

$\overline{CA}^2+\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+4\overline{CA}$에서

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{CA}^2-4\overline{CA}$ ⋯⋯ ㉠

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{CA}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{CA}\times\cos A$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서

$-4\overline{CA}=-2\times\overline{AB}\times\overline{CA}\times\cos A$

$\overline{AB}\cos A=2$

$\overline{BC}^2+\overline{CA}^2=\overline{AB}^2+8\overline{CA}$에서

$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{CA}^2-8\overline{CA}$ ⋯⋯ ㉢

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{CA}^2-2\times\overline{BC}\times\overline{CA}\times\cos C$ ⋯⋯ ㉣

㉢, ㉣에서

$-8\overline{CA}=-2\times\overline{BC}\times\overline{CA}\times\cos C$

$\overline{BC}\cos C=4$

따라서

$\dfrac{\overline{BC}\cos C}{\overline{AB}\cos A}=\dfrac{4}{2}=2$

14. 정답 50

길잡이

사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 삼각형 ABC의 모양을 알아낸다.

풀이

삼각형의 세 내각의 크기의 합은 π이므로 $B+C=\pi-A$,

$A+C=\pi-B$, $A+B=\pi-C$

$\sin(B+C)+\sin(A+C)\times\cos(A+B)=0$에서

$\sin(\pi-A)+\sin(\pi-B)\times\cos(\pi-C)=0$

$\sin A-\sin B\times\cos C=0$

$\sin A=\sin B\times\cos C$ ⋯⋯ ㉠

이때 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $\dfrac{5}{2}$이므로 $\overline{AB}=c$,

$\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$라 하면 사인법칙과 코사인법칙에 의하여

$\sin A=\dfrac{a}{5}$, $\sin B=\dfrac{b}{5}$, $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

이를 ㉠에 대입하면

$\dfrac{a}{5}=\dfrac{b}{5}\times\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$, $a^2+c^2=b^2$

즉, 삼각형 ABC는 $\angle B=\dfrac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다

이때 직각삼각형 ABC의 빗변이 외접원의 지름이므로

$b=\overline{CA}=5$이다.

따라서

$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2=c^2+a^2+b^2$

$=2b^2=2\times5^2=50$

15. 정답 ⑤

풀이

$\cos A\cos B\cos C=0$ 에서

$\cos A=0$ 또는 $\cos B=0$ 또는 $\cos C=0$

즉, 삼각형 ABC의 내각 중 하나는 직각이다.

$(\cos A-\cos B)(\cos B-\cos C)(\cos C-\cos A)=0$ 에서

$\cos A=\cos B$ 또는 $\cos B=\cos C$ 또는 $\cos C=\cos A$

즉, 삼각형 ABC의 내각 중 적어도 두 각의 크기가 서로 같다.

이때 삼각형 ABC의 한 내각이 직각이므로 삼각형 ABC는 직각이등변삼각형이다.

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하고 $\overline{AB}=c$,

$\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$라 하면 사인법칙에 의하여

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$

$\sin A=\dfrac{a}{2R}$, $\sin B=\dfrac{b}{2R}$, $\sin C=\dfrac{c}{2R}$

이므로 등식 $\sin A=k(\sin B-\sin C)$

$\dfrac{a}{2R}=k\left(\dfrac{b}{2R}-\dfrac{c}{2R}\right)$

$a=k(b-c)$ ⋯⋯ ㉠

한편, 삼각형 ABC가 직각이등변삼각형이므로 세 변의 길이의 비는

$a:b:c=1:1:\sqrt{2}$ 또는 $a:b:c=1:\sqrt{2}:1$ 또는

$a:b:c=\sqrt{2}:1:1$

이때 등식 ㉠이 성립하도록 하는 양수 k가 존재하려면

$a:b:c=1:\sqrt{2}:1$, 즉 $a=c$, $b=\sqrt{2}a$이어야 하므로

등식 ㉠에서

$a=k(\sqrt{2}a-a)$

$k=\dfrac{a}{(\sqrt{2}-1)a}=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$

16. 정답 ②

풀이

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{BC}}{\sin A}=\dfrac{\overline{CA}}{\sin B}=2R$

이므로

$\overline{BC}=2R\sin A$

$\overline{CA}=2R\sin B$

$\dfrac{\overline{BC}\times\overline{CA}}{R^2}=\dfrac{2R\sin A\times2R\sin B}{R^2}$

$=4\sin A\sin B$

조건 (나)의 $\sin A+\sin B=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2A+\sin^2B+2\sin A\sin B=\dfrac{8}{5}$ ⋯⋯ ㉠

이때 조건 (가)의 $\sin A=\cos B$를 ㉠에 대입하면

$\cos^2B+\sin^2B+2\sin A\sin B=\dfrac{8}{5}$

$1+2\sin A\sin B=\dfrac{8}{5}$

$\sin A\sin B=\dfrac{3}{10}$

따라서

$\dfrac{\overline{BC}\times\overline{CA}}{R^2}=4\sin A\sin B$

$=4\times\dfrac{3}{10}$

$= \frac{6}{5}$

17. 정답 ⑤

풀이

조건 (가)의 $\sin A = \sin C$를 만족시키려면 $A = C$ 또는 $A = \pi - C$이어야 한다. 이때 $A = \pi - C$, 즉 $A + C = \pi$이면 $B = 0$이 되어 삼각형 ABC가 될 수 없다.

따라서 $A = C$

$A = C$를 조건 (나)의 $\cos A + 2\cos B = 3\cos C$ 에 대입하면

$\cos A + 2\cos B = 3\cos A$

$\cos A = \cos B$

$A = B$

따라서 세 내각의 크기가 모두 같으므로 삼각형 ABC는 정삼각형이고,

$A = B = C = \frac{\pi}{3}$이다.

정삼각형 ABC의 한 변의 길이를 a $(a > 0)$이라 하면 이 삼각형의 넓이가 12이므로

$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = 12$

$a^2 = 16\sqrt{3}$

정삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{a}{\sin A} = 2R$

$R = \frac{a}{2\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}a$

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 넓이를 S라 하면

$S = \pi R^2$

$= \pi \times \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2$

$= \frac{\pi}{3}a^2$

$= \frac{16\sqrt{3}}{3}\pi$

18. [정답] ⑤

[해설]

삼각형 ABE와 삼각형 DCE는 서로 닮음이고

$\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{DC}} = 1 : 2$이므로 $\overline{\mathrm{BE}} : \overline{\mathrm{CE}} = 1 : 2$이다.

삼각형 BEC에서 $\overline{\mathrm{BE}} = k$ $(k > 0)$이라 하면 $\overline{\mathrm{CE}} = 2k$

원주각의 성질에 의하여 $\angle \mathrm{BDC} = \angle \mathrm{BAC} = \alpha$이므로 $\angle \mathrm{BEC} = \alpha + \beta$

삼각형 BEC에서 코사인법칙에 의하여

$(2\sqrt{30})^2 = k^2 + 4k^2 - 2 \times k \times 2k \times \left(-\frac{5}{12}\right)$, $k^2 = 18$

$k > 0$이므로 $k = 3\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{BE}} = 3\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{AE}} = t$ $(t > 0)$이라 하면 삼각형 ABE에서

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$이므로 $t^2 + 4^2 > (3\sqrt{2})^2$, $t > \sqrt{2}$

$\cos(\pi - (\alpha + \beta)) = -\cos(\alpha + \beta) = \frac{5}{12}$

삼각형 ABE에서 코사인법칙에 의하여

$4^2 = t^2 + (3\sqrt{2})^2 - 2 \times t \times 3\sqrt{2} \times \frac{5}{12}$

$2t^2 - 5\sqrt{2}t + 4 = 0$

$(2t - \sqrt{2})(t - 2\sqrt{2}) = 0$

$t > \sqrt{2}$ 이므로 $t = 2\sqrt{2}$

따라서 구하는 선분 AE의 길이는 $2\sqrt{2}$ 이다.

19. [정답] 64

20. [정답] ①

[해설]

삼각형 ABC의 외접원을 C_1,

삼각형 ADC의 외접원을 C_2라 하자.

원 C_1의 반지름의 길이를 R이라 하면

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin(\angle \mathrm{BAC})} = \frac{\frac{36\sqrt{7}}{7}}{\frac{2\sqrt{7}}{7}} = 18 = 2R,\ R = 9$$

원 C_2에서 $\angle \mathrm{AO'D}$는 호 AD의 중심각,

$\angle \mathrm{ACD}$는 호 AD의 원주각이므로

$\angle \mathrm{AO'D} = 2\angle \mathrm{ACD} = \frac{2}{3}\pi$

이등변삼각형 $\mathrm{O'AD}$에서 $\angle \mathrm{AO'D} = \frac{2}{3}\pi$이므로

$\angle \mathrm{DAO'} = \frac{\pi}{6}$

$\overline{\mathrm{OA}} = R = 9$, $\overline{\mathrm{AO'}} = 5\sqrt{3}$

$\angle \mathrm{OAO'} = \frac{\pi}{6}$이므로

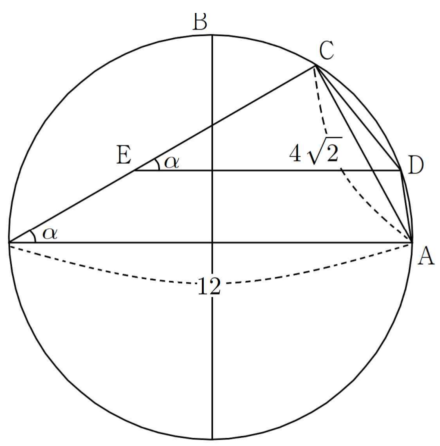
삼각형 $\mathrm{AOO'}$에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{OO'}}^2 = 9^2 + (5\sqrt{3})^2 - 2 \times 9 \times 5\sqrt{3} \times \cos\frac{\pi}{6}$

$= 81 + 75 - 135 = 21$

따라서 $\overline{\overline{\mathrm{OO'}}} = 21$

21. 정답 64

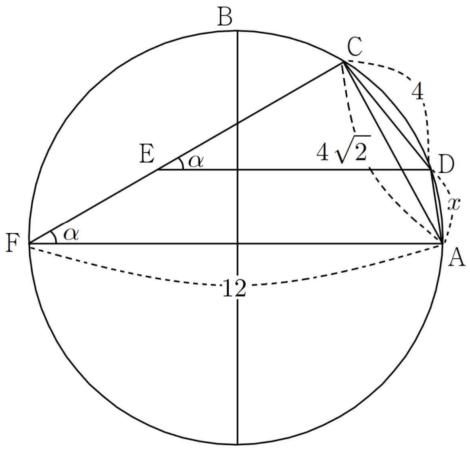


선분 AC의 연장선과 외접원과의 교점을 F라 할 때,

직각삼각형 ACF에서 $\sin\alpha = \frac{4\sqrt{2}}{12} = \frac{\sqrt{2}}{3}$, 삼각형 CDE에서

$\frac{\overline{CD}}{\sin\alpha} = 2R = 6\sqrt{2}$이므로 $\overline{CD} = 6\sqrt{2} \times \sin\alpha = 6\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{3} = 4$

$\angle CDA = \pi - \alpha$, $\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $\cos(\pi-\alpha) = \frac{\sqrt{7}}{3}$



$\angle DAC = \beta$라 할 때, 삼각형 ACD에서 사인법칙에 따라

$\frac{4}{\sin\beta} = \frac{4\sqrt{2}}{\sin\alpha}$, $\sin\beta = \frac{4}{4\sqrt{2}} \times \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{3}$

삼각형 ACD에서 코사인 2법칙에 따라

$x^2 + 32 - 8\sqrt{2}x \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = 16$, $x^2 - \frac{32}{3}x + 16 = 0$

$3x^2 - 32x + 48 = 0$, 근의 공식의 짝수 공식에 따라

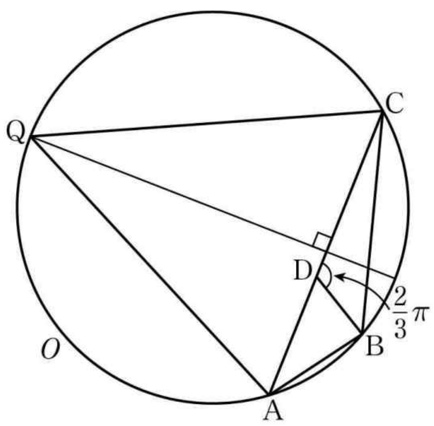
$x = \frac{16 \pm \sqrt{256-144}}{3} = \frac{16}{3} \pm \frac{\sqrt{112}}{3} = \frac{16}{3} \pm \frac{4}{3}\sqrt{7}$

$p = \frac{16}{3}$, $q = -\frac{4}{3}$, $\therefore\ 9|p \times q| = 9\left(\frac{16}{3} \times \frac{4}{3}\right) = 64$

22. [정답] ②

[해설]

점 B를 포함하지 않는 호 AC와 선분 AC의 수직이등분선의 교점을 R라 하자. P=R일 때, 삼각형 PAC의 넓이가 최대가 되므로 Q=R이다.



$\cos(\angle ABC) = -\frac{5}{8}$이므로

$\cos(\angle CQA) = \cos(\pi - \angle ABC) = -\cos(\angle ABC) = \frac{5}{8}$

$\overline{QA} = \overline{QC} = 6\sqrt{10}$이므로

삼각형 QAC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2 = \overline{QA}^2 + \overline{QC}^2 - 2 \times \overline{QA} \times \overline{QC} \times \cos(\angle CQA)$

$= (6\sqrt{10})^2 + (6\sqrt{10})^2 - 2 \times 6\sqrt{10} \times 6\sqrt{10} \times \frac{5}{8} = 270$

$\overline{AB} = a\ (a>0)$이라 하면 $2\overline{AB} = \overline{BC}$에서 $\overline{BC} = 2a$이다.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \cos(\angle ABC)$

$= a^2 + (2a)^2 - 2 \times a \times 2a \times \left(-\frac{5}{8}\right) = \frac{15}{2}a^2$

$\frac{15}{2}a^2 = 270$에서 $a = 6$

삼각형 CDB의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 삼각형 CDB에서 사인법칙에 의하여

$2R = \frac{\overline{BC}}{\sin(\angle CDB)} = \frac{2a}{\sin\frac{2}{3}\pi} = \frac{12}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 8\sqrt{3}$

따라서 $R = 4\sqrt{3}$

23. 정답 ③

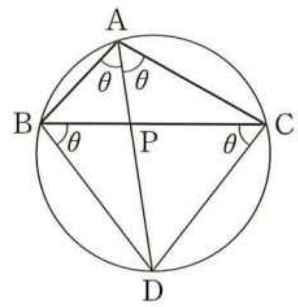
풀이

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos A = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 - \overline{BC}^2}{2 \times \overline{AB} \times \overline{CA}}$

$= \frac{2^2 + 3^2 - 4^2}{2 \times 2 \times 3}$

$= -\frac{1}{4}$



$\angle BAD = \angle DAC = \theta$라 하면 원주각의 성질에 의하여

$\angle DBC = \angle DCB = \theta$이므로 삼각형 BDC는 $\overline{BD} = \overline{CD}$인 이등변삼각형이다.

$\cos(\angle BDC) = \cos(\pi - A) = -\cos A = \frac{1}{4}$ 이므로

$\overline{BD} = \overline{CD} = a\ (a>0)$이라 하면 삼각형 BDC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 - 2 \times \overline{BD} \times \overline{CD} \times \cos(\angle BDC)$

$4^2 = a^2 + a^2 - 2 \times a \times a \times \frac{1}{4}$

$a^2 = \frac{32}{3}$

$a > 0$이므로

$a = \frac{4\sqrt{6}}{3}$

즉, $\overline{BD} = \overline{CD} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$

한편, $\sin(\angle BDC) = \sqrt{1 - \cos^2(\angle BDC)}$

$$= \sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}$$
$$= \frac{\sqrt{15}}{4}$$

따라서 삼각형 BDC의 넓이를 S라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times \overline{BD} \times \overline{CD} \times \sin(\angle BDC)$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{4\sqrt{6}}{3} \times \frac{4\sqrt{6}}{3} \times \frac{\sqrt{15}}{4}$$
$$= \frac{4\sqrt{15}}{3}$$

24. 정답 ⑤

풀이

ㄱ. 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 - 2 \times \overline{BC} \times \overline{CA} \times \cos C$$
$$= (3\sqrt{2})^2 + (\sqrt{10})^2 - 2 \times 3\sqrt{2} \times \sqrt{10} \times \frac{2\sqrt{5}}{5}$$
$$= 4$$

이므로 $\overline{AB} = 2$ (참)

ㄴ. $\sin C = \sqrt{1-\cos^2 C}$

$$= \sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2}$$
$$= \frac{\sqrt{5}}{5}$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AB}}{\sin C} = 2R$$
$$R = \frac{\overline{AB}}{2\sin C} = \frac{2}{2 \times \frac{\sqrt{5}}{5}} = \sqrt{5}$$

이므로 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는

$\pi \times (\sqrt{5})^2 = 5\pi$ (참)

ㄷ. 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{CA}}{\sin B} = \frac{\overline{AB}}{\sin C}$이므로

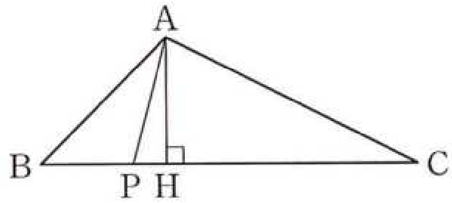
$$\sin B = \frac{\overline{CA}}{\overline{AB}} \sin C$$
$$= \frac{\sqrt{10}}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{5}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

두 삼각형 ABP, ACP에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BP}}{\sin(\angle PAB)} = \frac{\overline{AP}}{\sin B}$$
$$\frac{\overline{CP}}{\sin(\angle CAP)} = \frac{\overline{AP}}{\sin C}$$

이므로

$$\frac{\overline{BP} \times \overline{CP}}{\sin(\angle PAB) \times \sin(\angle CAP)} = \frac{\overline{AP}}{\sin B} \times \frac{\overline{AP}}{\sin C}$$
$$= \frac{\overline{AP}^2}{\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{5}}$$
$$= \sqrt{10}\,\overline{AP}^2$$



이때 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{AH} = \overline{AB} \sin B = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

따라서

$$\frac{\overline{BP} \times \overline{CP}}{\sin(\angle PAB) \times \sin(\angle CAP)} = \sqrt{10}\,\overline{AP}^2$$
$$\geq \sqrt{10}\,\overline{AH}^2$$
$$= \sqrt{10} \times (\sqrt{2})^2$$
$$= 2\sqrt{10}$$

이므로

$\frac{\overline{BP} \times \overline{CP}}{\sin(\angle PAB) \times \sin(\angle CAP)}$의 값은 점 P가 점 H와 일치할 때

최솟값 $2\sqrt{10}$을 갖는다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

25. 정답 10

$\overline{AB} = \overline{DE}$, $\overline{AB} \,/\!/\, \overline{DE}$에서 사각형 ABDE는 평행사변형이므로

$\angle BAE = \angle BDE$

사각형 ABDE가 원에 내접하므로 $\angle BAE + \angle BDE = \pi$

따라서 사각형 ABDE는 직사각형이므로 두 선분 AD, BE는 원의 지름이다.

$\cos(\angle ACB) = \cos(\angle AEB) = \cos(\angle EDB) = \frac{1}{3}$이므로

$$\sin(\angle ACB) = \sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

삼각형 ABC의 외접원의 지름의 길이가 6이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AB}}{\sin(\angle ACB)} = 6$, 즉 $\overline{AB} = 6 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = 4\sqrt{2}$

삼각형 ABC에서 $\overline{AC} = k$ $(k > 0)$으로 놓으면 $\overline{BC} = 5$이므로 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \times \overline{AC} \times \overline{BC} \times \cos(\angle ACB)$$

$32 = k^2 + 25 - \frac{10}{3}k$, $3k^2 - 10k - 21 = 0$

$k > 0$이므로 $k = \frac{5+2\sqrt{22}}{3}$, 즉 $\overline{AC} = \frac{5+2\sqrt{22}}{3}$

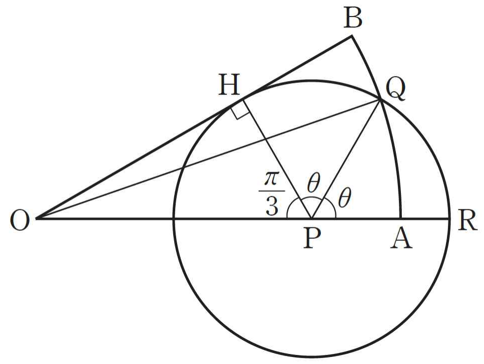
따라서 $p = \frac{5}{3}$, $q = \frac{2}{3}$이므로 $9pq = 10$

26. 정답 ③

$\overline{PH} = a$ $(a > 0)$이라 하면 $\angle PHO = \frac{\pi}{2}$, $\angle POH = \frac{\pi}{6}$이므로

$= \dfrac{\overline{\mathrm{PH}}}{\sin\dfrac{\pi}{6}} = 2a$

점 Q가 부채꼴 PRH의 호 RH를 이등분하므로



$\angle\,\mathrm{QPH} = \theta\ \left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$

라 하면 $\angle\,\mathrm{QPR} = \theta$이고

$\angle\,\mathrm{OPH} = \dfrac{\pi}{3}$이므로

$\dfrac{\pi}{3} + 2\theta = \pi$에서 $\theta = \dfrac{\pi}{3}$

삼각형 OPQ에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{OQ}}^2 = \overline{\mathrm{OP}}^2 + \overline{\mathrm{PQ}}^2 - 2\times\overline{\mathrm{OP}}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times\cos(\angle\,OPQ)$

$4^2 = (2a)^2 + a^2 - 2\times 2a\times a\times\cos\dfrac{2}{3}\pi,\ 7a^2 = 16$

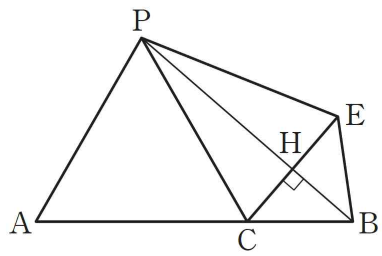
$a > 0$이므로 $a = \dfrac{4\sqrt{7}}{7}$

따라서 부채꼴 PRH의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{4\sqrt{7}}{7}\right)^2\times\dfrac{2}{3}\pi = \dfrac{16}{21}\pi$

27. 정답 ③

선분 CE는 두 원 O_2, O_3의 공통인 현이므로 두 직선 PB, CE는 서로 수직이다.



삼각형 PAC는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이므로 삼각형 PAB에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{PB}}^2 = \overline{\mathrm{PA}}^2 + \overline{\mathrm{AB}}^2 - 2\times\overline{\mathrm{PA}}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\cos(\angle\,PAB)$

$\quad = 2^2 + 3^2 - 2\times 2\times 3\times\dfrac{1}{2} = 7$

$\overline{\mathrm{PB}} > 0$이므로 $\overline{\mathrm{PB}} = \sqrt{7}$

점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 길이가 $\sqrt{3}$이므로 삼각형 PCB의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times 1\times\sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

이때 두 선분 PB, CE의 교점을 H라 하면

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{CH}}\times\overline{\mathrm{PB}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\overline{\mathrm{CH}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$

$\overline{\mathrm{CE}} = 2\times\overline{\mathrm{CH}} = \dfrac{2\sqrt{21}}{7}$

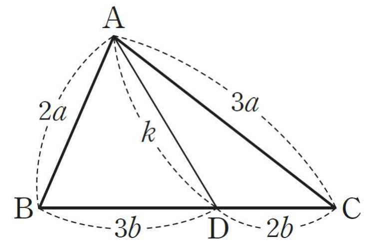
삼각형 EDC의 외접원 O_3의 반지름의 길이가 2이므로 사인법칙에 의하여 $\dfrac{\overline{\mathrm{CE}}}{\sin(\angle\,\mathrm{EDC})} = 2\times 2$

따라서 $\sin(\angle\,\mathrm{EDC}) = \dfrac{\overline{\mathrm{CE}}}{4} = \dfrac{\sqrt{21}}{14}$

28. 정답 ⑤

$\overline{\mathrm{AB}} = 2a$, $\overline{\mathrm{AC}} = 3a\ (a > 0)$으로 놓고 $\overline{\mathrm{BD}} = 3b$, $\overline{\mathrm{DC}} = 2b$ $(b > 0)$을 으로 놓자.

$\overline{\mathrm{AD}} = k\ (k > 0)$으로 놓으면



$\dfrac{\cos(\angle\,\mathrm{ABD})}{\cos(\angle\,\mathrm{ACD})} = \dfrac{1}{2}$에서

$2\cos(\angle\,\mathrm{ABD}) = \cos(\angle\,\mathrm{ACD})$

$2\times\dfrac{(2a)^2 + (3b)^2 - k^2}{2\times 2a\times 3b}$

$= \dfrac{(3a)^2 + (2b)^2 - k^2}{2\times 3a\times 2b}$

$k^2 = 14b^2 - a^2$ …… ㉠

$\cos(\angle\,\mathrm{BDA}) = \cos(\pi - \angle\,\mathrm{CDA}) = -\cos(\angle\,\mathrm{CDA})$이므로

$\dfrac{(3b)^2 + k^2 - (2a)^2}{2\times 3b\times k} = \dfrac{(2b)^2 + k^2 - (3a)^2}{2\times 2b\times k}$

$k^2 = 7a^2 - 6b^2$ …… ㉡

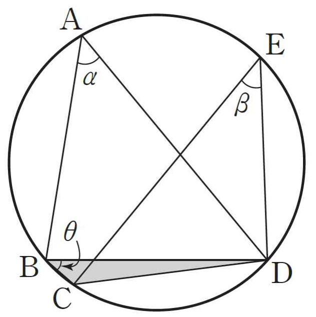
㉠, ㉡에서 $14b^2 - a^2 = 7a^2 - 6b^2$

즉, $b^2 = \dfrac{2}{5}a^2$이므로 ㉡에 대입하면 $k^2 = 7a^2 - \dfrac{12}{5}a^2 = \dfrac{23}{5}a^2$

따라서 $\dfrac{\overline{\mathrm{AD}}}{\overline{\mathrm{AB}}} = \dfrac{k}{2a} = \dfrac{1}{2}\times\sqrt{\dfrac{23}{5}} = \dfrac{\sqrt{115}}{10}$

29. 정답 ④

$\angle\,\mathrm{BAD} = \alpha$, $\angle\,\mathrm{CED} = \beta$라 하면



$\sin\alpha = \dfrac{3}{4}$, $\sin\beta = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$

주어진 원의 반지름의 길이가 4이므로

삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{BD}}}{\sin\alpha} = 2\times 4$

$\overline{\mathrm{BD}} = 8\sin\alpha = 8\times\dfrac{3}{4} = 6$

삼각형 ECD에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sin\beta} = 2\times 4$

$\overline{\mathrm{CD}} = 8\sin\beta = 8\times\dfrac{\sqrt{7}}{4} = 2\sqrt{7}$

$\overline{\mathrm{BC}} = x\ (0 < x < 8)$, $\angle\,\mathrm{CBD} = \theta\ \left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$라 하자.

$\angle\,\mathrm{CED}$와 $\angle\,\mathrm{CBD}$는 모두 호 CD의 원주각이므로 $\theta = \beta$

즉, $\sin\theta = \sin\beta = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$

$\cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta} = \sqrt{1 - \left(\dfrac{\sqrt{7}}{4}\right)^2} = \dfrac{3}{4}$

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{CD}}^2 = \overline{\mathrm{BC}}^2 + \overline{\mathrm{BD}}^2 - 2\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{BD}}\times\cos\theta$

$(2\sqrt{7})^2 = x^2 + 6^2 - 2\times x\times 6\times\dfrac{3}{4}$

$x^2 - 9x + 8 = 0$, $(x-1)(x-8) = 0$

$0 < x < 8$이므로 $x = 1$

따라서 삼각형 BCD의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{BD}}\times\sin\theta = \dfrac{1}{2}\times 1\times 6\times\dfrac{\sqrt{7}}{4} = \dfrac{3\sqrt{7}}{4}$

30. 정답 ②

$\overline{OA}=2$, $\overline{OM}=\frac{1}{2}\overline{OA}=\frac{1}{2}\times 2=1$이고 $\angle MOA=\frac{2}{3}\pi$이므로

삼각형 OAM에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AM}^2=\overline{OA}^2+\overline{OM}^2-2\times\overline{OA}\times\overline{OM}\times\cos\frac{2}{3}\pi$$

$$=2^2+1^2-2\times2\times1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=7$$

$\overline{AM}>0$이므로 $\overline{AM}=\sqrt{7}$

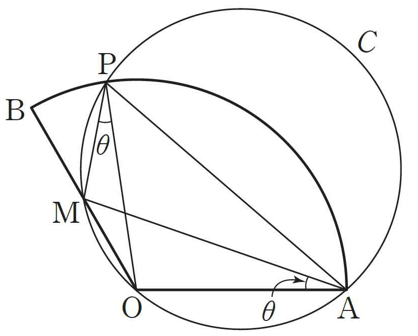
$\angle OAM=\angle OPM=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면 삼각형 OAM에서

코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{\overline{OA}^2+\overline{AM}^2-\overline{OM}^2}{2\times\overline{OA}\times\overline{AM}}$$

$$=\frac{2^2+(\sqrt{7})^2-1^2}{2\times2\times\sqrt{7}}$$

$$=\frac{5}{2\sqrt{7}}=\frac{5\sqrt{7}}{14}$$



이고

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\frac{25}{28}}=\frac{\sqrt{21}}{14}$$

또한 $\overline{OP}=2$이므로 $\overline{MP}=a(a<\sqrt{7})$이라 하면 삼각형 OPM에서

코사인법칙에 의하여

$$\overline{OM}^2=\overline{OP}^2+\overline{MP}^2-2\times\overline{OP}\times\overline{MP}\times\cos\theta$$

$$1^2=2^2+a^2-2\times2\times a\times\frac{5\sqrt{7}}{14},\ a^2-\frac{10\sqrt{7}}{7}a+3=0$$

$$\sqrt{7}a^2-10a+3\sqrt{7}=0,\ (\sqrt{7}a-3)(a-\sqrt{7})=0$$

$a<\sqrt{7}$이므로 $a=\frac{3}{\sqrt{7}}=\frac{3\sqrt{7}}{7}$, 즉 $\overline{MP}=\frac{3\sqrt{7}}{7}$

한편, $\angle OAM=\angle OPM$이므로 네 점 O, A, P, M을 모두 지나는 원이 존재한다.

이 원을 C라 하고 원 C의 반지름의 길이를 R이라 하면 삼각형 OAM에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{OM}}{\sin\theta}=2R,$$

$$R=\frac{\overline{OM}}{2\sin\theta}=\frac{1}{2\times\frac{\sqrt{21}}{14}}=\frac{\sqrt{21}}{3}$$

삼각형 OAP에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{OA}}{\sin(\angle APO)}=2R,$$

$$\sin(\angle APO)=\frac{\overline{OA}}{2R}=\frac{2}{2\times\frac{\sqrt{21}}{3}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$$

$\angle APO=\angle AMO$이고 $0<\angle AMO<\frac{\pi}{3}$이므로

$$0<\angle APO<\frac{\pi}{3}$$

$$\cos(\angle APO)=\sqrt{1-\sin^2(\angle APO)}=\sqrt{1-\frac{3}{7}}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$$

이때 삼각형 OAP에서 $\overline{OA}=\overline{OP}=2$이므로

$$\overline{AP}=2\times\overline{OP}\cos(\angle APO)=2\times2\times\frac{2\sqrt{7}}{7}=\frac{8\sqrt{7}}{7}$$

따라서 삼각형 PMA의 둘레의 길이는

$$\overline{AM}+\overline{MP}+\overline{AP}=\sqrt{7}+\frac{3\sqrt{7}}{7}+\frac{8\sqrt{7}}{7}=\frac{18\sqrt{7}}{7}$$

31. 정답 ①

선분 AB가 지름이고 $\overline{AC}=\overline{BC}$이므로 삼각형 ACB는

$\angle ACB=90^\circ$인 직각이등변삼각형이고

$\overline{AB}=4$에서 $\overline{AC}=\overline{BC}=2\sqrt{2}$

원주각의 성질에 의하여 $\angle ADC=\angle ABC=\frac{\pi}{4}$이고

$\angle BDA=\frac{\pi}{2}$이므로 $\angle BDC=\frac{\pi}{4}$

$\overline{BD}=x$라 하면 삼각형 CBD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=\overline{BD}^2+\overline{CD}^2-2\times\overline{BD}\times\overline{CD}\times\cos(\angle BDC)$이므로

$$(2\sqrt{2})^2=x^2+3^2-2\times x\times3\times\cos\frac{\pi}{4},\ x^2-3\sqrt{2}x+1=0$$

$\overline{BD}<\overline{BC}$에서 $0<x<2\sqrt{2}$이므로

$$x=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{(3\sqrt{2})^2-4}}{2}=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{14}}{2}$$

다른 풀이

선분 AB가 지름이고 $\overline{AC}=\overline{BC}$이므로 삼각형 ACB는

$\angle ACB=90^\circ$인 직각이등변삼각형이고

$\overline{AB}=4$에서 $\overline{AC}=\overline{BC}=2\sqrt{2}$

삼각형 CBD의 외접원의 반지름의 길이가 2이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{CD}}{\sin(\angle CBD)}=2\times2$$

$$\frac{3}{\sin(\angle CBD)}=4,\ \sin(\angle CBD)=\frac{3}{4}$$

$\overline{AD}>\overline{BD}$에서 $\angle ABD>\frac{\pi}{4}$이고 직각삼각형 ABC에서

$\angle CBA=\frac{\pi}{4}$이므로 $\angle CBD>\frac{\pi}{2}$

$\cos(\angle CBD)<0$이므로

$$\cos(\angle CBD)=-\sqrt{1-\sin^2(\angle CBD)}=-\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=-\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$\overline{BD}=x$라 하면 삼각형 CBD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{CD}^2=\overline{BC}^2+\overline{BD}^2-2\times\overline{BC}\times\overline{BD}\times\cos(\angle CBD)$이므로

$$3^2=(2\sqrt{2})^2+x^2-2\times2\sqrt{2}\times x\times\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right),\ x^2+\sqrt{14}x-1=0$$

$x>0$이므로 $x=\frac{-\sqrt{14}+\sqrt{14+4}}{2}=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{14}}{2}$

32. 정답 ②

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AB}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos(\angle ABC)$$

$$=3^2+(\sqrt{5})^2-2\times3\times\sqrt{5}\times\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$

$$=20$$

$\overline{AC}=2\sqrt{5}$

$\sin(\angle \mathrm{ABC})= \sqrt{1-\cos^2(\angle \mathrm{ABC})} = \sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 사인법칙에 의하여

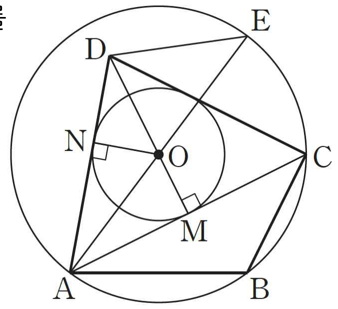
$\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin(\angle \mathrm{ABC})}=2R$

$R=\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{2\sin(\angle \mathrm{ABC})}=\frac{2\sqrt{5}}{2\times\frac{2\sqrt{5}}{5}}=\frac{5}{2}$

점 O는 삼각형 ABC의 외접원의 중심이므로 선분 AC의 수직이등분선 위에 있다.

그러므로 내접원의 중심이 O인 삼각형 ACD는 $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{CD}}$인 이등변삼각형이다.

삼각형 ACD의 내접원의 반지름의 길이를 r, 선분 AC의 중점을 M이라 하면 직각삼각형 OAM에서



$\overline{\mathrm{OM}}^2=\overline{\mathrm{AO}}^2-\overline{\mathrm{AM}}^2=R^2-\left(\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{2}\right)^2$

$=\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{2\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$

$r=\overline{\mathrm{OM}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$

점 O에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 N이라 하면 두 직각삼각형 DAM, DON은 서로 닮은 도형이고 닮음비는

$\overline{\mathrm{AM}}:\overline{\mathrm{ON}}=\sqrt{5}:\frac{\sqrt{5}}{2}=2:1$

$\overline{\mathrm{AD}}=x$라 하면 $\overline{\mathrm{DO}}=\frac{x}{2}$, $\overline{\mathrm{DN}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{DM}}$

점 O가 삼각형 ACD의 내접원의 중심이므로

$\overline{\mathrm{AN}}=\overline{\mathrm{AM}}$, $\angle \mathrm{DAE}=\angle \mathrm{OAM}$

$\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{AN}}+\overline{\mathrm{DN}}=\overline{\mathrm{AM}}+\frac{1}{2}\overline{\mathrm{DM}}=\overline{\mathrm{AM}}+\frac{1}{2}(\overline{\mathrm{DO}}+\overline{\mathrm{OM}})$에서

$x=\sqrt{5}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{1}{4}x+\frac{5\sqrt{5}}{4}$

$\frac{3}{4}x=\frac{5\sqrt{5}}{4}$

$\overline{\mathrm{AD}}=x=\frac{5\sqrt{5}}{3}$

$\cos(\angle \mathrm{DAE})=\cos(\angle \mathrm{OAM})=\frac{\overline{\mathrm{AM}}}{\overline{\mathrm{AO}}}=\frac{\sqrt{5}}{\frac{5}{2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

따라서 삼각형 DAE에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{DE}}^2=\overline{\mathrm{AD}}^2+\overline{\mathrm{AE}}^2-2\times\overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{AE}}\times\cos(\angle \mathrm{DAE})$

$=\left(\frac{5\sqrt{5}}{3}\right)^2+5^2-2\times\frac{5\sqrt{5}}{3}\times5\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{50}{9}$

이므로 $\overline{\mathrm{DE}}=\frac{5\sqrt{2}}{3}$

TH①. 등차수열

출제 : 11번,12번,13번,14번

[Prediction] 50%

무난하게 공차 또는 항이 자연수가 된다는 부분을 출제할 확률이 높다.

2024년 5월 교육청모의고사

1. 공차가 정수인 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$과 자연수 $m\ (m \geq 3)$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $|a_1 - b_1| = 5$
(나) $a_m = b_m$, $a_{m+1} < b_{m+1}$

$\sum_{k=1}^{m} a_k = 9$일 때, $\sum_{k=1}^{m} b_k$의 값은?1.

① -6 ② -5 ③ -4
④ -3 ⑤ -2

2024년 7월 교육청모의고사

2. 공차가 $d\ (0 < d < 1)$인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) a_5는 자연수이다.
(나) 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $S_8 = \frac{68}{3}$이다.

a_{16}의 값은?

① $\frac{19}{3}$ ② $\frac{77}{12}$ ③ $\frac{13}{2}$
④ $\frac{79}{12}$ ⑤ $\frac{20}{3}$

3. 공차가 정수인 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$과 자연수 $m\ (m \geq 3)$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $|a_1 - b_1| = 5$

(나) $a_m = b_m$, $a_{m+1} < b_{m+1}$

$\sum_{k=1}^{m} a_k = 9$일 때, $\sum_{k=1}^{m} b_k$의 값은?

① -6 ② -5 ③ -4
④ -3 ⑤ -2

4. 모든 항이 자연수인 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$a_5 - b_5 = a_6 - b_7 = 0$$

이다. $a_7 = 27$이고 $b_7 \leq 24$일 때, $b_1 - a_1$의 값은?

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

5. 공차가 음의 정수인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_6 = -2,\ \sum_{k=1}^{8}|a_k| = \sum_{k=1}^{8} a_k + 42$$

일 때, $\sum_{k=1}^{8} a_k$의 값은?

① 40 ② 44 ③ 48
④ 52 ⑤ 56

연계 가능

6. 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$과 공비가 r인 등비수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) d와 r은 모두 0이 아닌 정수이고, $r^2 < 100$이다.
> (나) $a_9 = b_9 = 12$
> (다) $a_5 + a_6 = b_{11}$

$a_8 + b_8$의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 56 ② 57 ③ 58
④ 59 ⑤ 60

[Prediction] 50%

이렇게 전개하여 간단하게 해결하는 문항이 출제될 가능성이 있다.

2025학년도 9월 평가원모의고사

7. 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이고, 수열 $\{b_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k$$

를 만족시킨다. $b_2 = -2$, $b_3 + b_7 = 0$일 때, 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제9항까지의 합은?

① -22 ② -20 ③ -18
④ -16 ⑤ -14

2025학년도 경찰대학교

8. 첫째항과 공차가 정수인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$이

$$b_n = n^2 \sin(\pi a_n) + n\cos(\pi a_n) + 1$$

$$\sum_{n=1}^{7} b_n = 3$$

을 만족시킬 때, $b_{48} + b_{49} + b_{50}$의 값은?

① 48 ② 50 ③ 52
④ 54 ⑤ 56

[Prediction] 10%

수능특강에 등차수열의 합을 양 끝항의 합을 활용하여 푸는 문항들이 여러개 존재 한다.

2024년 수능특강 Lv3

연계 가능

9. 모든 항이 0이 아니고 공차가 음수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하고, 수열 $\{S_n\}$의 각 항을 큰 수부터 다시 차례로 나열한 수열을 $\{M_n\}$이라 하자.

$$M_1 - M_2 = 2,\ M_2 - M_3 = 1$$

이고, $S_n < 0$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값이 21일 때, a_1의 값을 구하시오.

TH②. 귀납법

출제 : 귀납법문항은 올해 6월, 9월 평가원 모의고사에서는 22번으로 출제가 되었다. 그렇다고 올해 수능에서도 22번에 출제될 것이라는 예측은 하지 않겠다! 22번은 정답률이 10%아래로 떨어지는 수2 문항을 출제해야 표준점수가 정부에서 원하는 대로 나오기 때문이다. 그러면 우리는 귀납법 문항이 12번 혹은 15번에 나올 수 있는 가능성을 열어두어야 한다.

[Prediction] 50%

이렇게 항을 양쪽에서 모으는 식으로 전개를 하는 귀납법 문항이 출제될 확률이 높다.

2025학년도 6월 평가원모의고사

2025 Trend

10. 수열 $\{a_n\}$은

$$a_2 = -a_1$$

이고, $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - \sqrt{n} \times a_{\sqrt{n}} & (\sqrt{n}\text{이 자연수이고 } a_n > 0\text{인 경우}) \\ a_n + 1 & (\text{그 외의 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_{15} = 1$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 곱을 구하시오.

2025학년도 9월 평가원모의고사

2025 Trend

11. 양수 k에 대하여 $a_1 = k$인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_2 \times a_3 < 0$

(나) 모든 자연수 n에 대하여

$$\left(a_{n+1} - a_n + \frac{2}{3}k\right)(a_{n+1} + ka_n) = 0 \text{이다.}$$

$a_5 = 0$이 되도록 하는 서로 다른 모든 양수 k에 대하여 k^2의 값의 합을 구하시오.

[Prediction] 10%

역추론, 가벼운 대입 등 기존에 자주 출제가 되었던 방향으로 나올 수 있다.

2024년도 10월 교육청모의고사

12. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n}{n} & (n\text{이 } a_n\text{의 약수인 경우}) \\ 3a_n + 1 & (n\text{이 } a_n\text{의 약수가 아닌 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_6 = 2$가 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은?

① 254 ② 264 ③ 274
④ 284 ⑤ 294

13. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, 모든 a_1의 값의 합을 구하시오.

(가) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 1 & (a_n\text{은 홀수}) \\ \dfrac{a_n}{2} & (a_n\text{은 짝수}) \end{cases}$$

(나) $a_5 = 1$

14. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $|a_5|$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은?

(가) $a_2 = 27$, $a_3 a_4 > 0$

(나) 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k = 2|a_n|$이다.

① 224 ② 232 ③ 240 ④ 248 ⑤ 256

15. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{1}{2}a_n & \left(\frac{1}{2}a_n\text{이 자연수인 경우}\right)\\(a_n-1)^2 & \left(\frac{1}{2}a_n\text{이 자연수가 아닌 경우}\right)\end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_7=1$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은?

① 120 ② 125 ③ 130
④ 135 ⑤ 140

16. 첫째 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{a_n}{3} & (a_n\text{이 3의 배수인 경우})\\\frac{{a_n}^2+5}{3} & (a_n\text{이 3의 배수가 아닌 경우})\end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_4+a_5=5$가 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은?16.

① 63 ② 66 ③ 69
④ 72 ⑤ 75

17. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n & (a_n > n) \\ 3n-2-a_n & (a_n \le n) \end{cases}$$

을 만족시킬 때, $a_5=5$가 되도록 하는 모든 a_1의 값의 곱은?

① 20 ② 30 ③ 40
④ 50 ⑤ 60

18. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_1의 값의 합은?

(가) $a_8=2$이고, 모든 항이 30 이하의 자연수이다.
(나) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+4 & (a_n\text{이 3의 배수가 아닌 경우}) \\ \frac{1}{3}a_n & (a_n\text{이 3의 배수인 경우}) \end{cases}$$

이다.

① 68 ② 70 ③ 72
④ 74 ⑤ 76

19. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_7의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은?

> (가) $a_1=4$이고, 모든 자연수 n에 대하여
> $(a_{n+1}-a_n-2)(a_{n+1}-2a_n)=0$이다.
> (나) $2\le k\le 7$인 모든 자연수 k에 대하여 a_k는 3의 배수가 아니다.
> (다) a_7은 5의 배수이다.

① 200　② 210　③ 220　④ 230　⑤ 240

2024년 수능완성

20. 자연수 k에 대하여 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=4k-20$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} |a_n-4| & \left(n\le \dfrac{a_1}{4}+1\right) \\ a_n+4 & \left(n>\dfrac{a_1}{4}+1\right) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_1=a_{20}$일 때, k의 값은?

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

21. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{10} S_{4k}$의 값은? (단, 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \neq 0$이다.) [4점]

> $a_1 = 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 1 & \left(\dfrac{S_n}{a_n}\text{이 자연수인 경우}\right) \\ a_n - 1 & \left(\dfrac{S_n}{a_n}\text{이 자연수가 아닌 경우}\right) \end{cases}$$
> 이다.

① 600 ② 610 ③ 620
④ 630 ⑤ 640

22. 모든 항이 정수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_5의 값의 합을 구하시오. [4점]

> (가) $a_1 = 100$이고, 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+2} = \begin{cases} a_n - a_{n+1} & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ 2a_{n+1} - a_n & (n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$
> 이다.
> (나) 6이하의 모든 자연수 m에 대하여 $a_m a_{m+1} > 0$이다.

23. 모든 항이 2이상인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1 = 2$

(나) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2} = \begin{cases} \dfrac{a_{n+1}}{2} & (a_{n+1} \geq a_n) \\ 4a_{n+1} - 4 & (a_{n+1} < a_n) \end{cases}$$

이다.

자연수 k와 5이하의 자연수 m이

$$a_k = k, \ a_{k+m} = k+m$$

을 만족시킬 때, $2k+m$의 값은? [4점]

① 10 ② 14 ③ 18

④ 22 ⑤ 26

1. 정답 ①

a_n-b_n도 등차수열이므로 $a_n-b_n=An+B$이라 할 때,

$a_1-b_1=5$ 또는 -5 이므로 $A+B=5$ 또는 $A+B=-5$

(ⅰ) $A+B=5$일 때,

(가) 조건은 $a_m-b_m=Am+B=0$이므로 $A+B=5$와 양변을 빼면

$A(m-1)=-5$에서 m은 $m\geq 3$인 자연수이므로 $A=-1,\ m=6$

$-1+B=5,\ B=6,\ \therefore\ a_n-b_n=-n+6,\ a_7-b_7=-1<0$

(ⅱ) $A+B=-5$일 때,

$\begin{cases} Am+B=0 \\ A+B=-5 \end{cases}$에서 $A(m-1)=5,\ A=1,\ m=6$

$a_n-b_n=n-6,\ a_7-b_7=1$이므로 조건에 맞지 않는다.

$\therefore\ a_n-b_n=-n+6$

$\sum_{k=1}^{6}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{6}(-k+6)=\frac{6(5+0)}{2}=15$

$\therefore\ \sum_{k=1}^{6}b_k=\sum_{k=1}^{6}a_k-15=9-15=-6$

2. [정답] ⑤

[해설]

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하자.

$a_n=a+(n-1)d$ (단, n은 자연수)

$a_5=a+4d$는 자연수이다.

$S_8=\frac{8(2a+7d)}{2}=4(2a+7d)=\frac{68}{3}$

$2a+7d=\frac{17}{3}$

$2(a+4d)-d=2a_5-d=\frac{17}{3}$

$a_5=\frac{1}{2}d+\frac{17}{6}$

$0<d<1$이므로 $\frac{17}{6}<a_5<\frac{10}{3}$

$a_5=3,\ d=\frac{1}{3}$

$a_5=a+4\times\frac{1}{3}=3,\ a=\frac{5}{3}$

$a_n=\frac{5}{3}+(n-1)\times\frac{1}{3}$

따라서 $a_{16}=\frac{5}{3}+15\times\frac{1}{3}=\frac{20}{3}$

3. 정답 ①

a_n-b_n도 등차수열이므로 $a_n-b_n=An+B$이라 할 때,

$a_1-b_1=5$ 또는 -5 이므로 $A+B=5$ 또는 $A+B=-5$

(ⅰ) $A+B=5$일 때,

(가) 조건은 $a_m-b_m=Am+B=0$이므로 $A+B=5$와 양변을 빼면

$A(m-1)=-5$에서 m은 $m\geq 3$인 자연수이므로 $A=-1,\ m=6$

$-1+B=5,\ B=6,\ \therefore\ a_n-b_n=-n+6,\ a_7-b_7=-1<0$

(ⅱ) $A+B=-5$일 때,

$\begin{cases} Am+B=0 \\ A+B=-5 \end{cases}$에서 $A(m-1)=5,\ A=1,\ m=6$

$a_n-b_n=n-6,\ a_7-b_7=1$이므로 조건에 맞지 않는다.

$\therefore\ a_n-b_n=-n+6$

$\sum_{k=1}^{6}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{6}(-k+6)=\frac{6(5+0)}{2}=15$

$\therefore\ \sum_{k=1}^{6}b_k=\sum_{k=1}^{6}a_k-15=9-15=-6$

4. [정답] ③

[해설]

등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공차를 각각 d, l이라 하자.

$a_6-a_5=b_7-b_5$이므로 $d=2l$

$d=0$이면 $a_7=a_6=27$이고 $b_7\leq 24$에서 $a_6\neq b_7$이므로 $d\neq 0$이다.

l은 자연수이므로 d는 2의 배수이다.

$a_7=a_1+6d=27$에서

$a_1=27-6d>0$이므로 $d=2$ 또는 $d=4$

(ⅰ) $d=2$인 경우, $a_1=27-6\times 2=15$이고

$b_7=b_5+2l=a_5+d=a_1+5d=25$

(ⅱ) $d=4$인 경우, $a_1=27-6\times 4=3$이고

$b_7=b_5+2l=a_5+d=a_1+5d=23$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $b_7\leq 24$이므로 $d=4,\ l=2$

$b_1-a_1=(b_5-a_5)+4(d-l)=4\times 2=8$

5. [정답] ②

[해설]

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d $(d<0)$이라 하자.

a_6, d가 모두 정수이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 정수이다.

$d=a_6-a_5=-2-a_5$이고 $d<0$이므로 $a_5>-2$

즉, $a_5=-1$ 또는 a_5는 음이 아닌 정수이다.

(ⅰ) $a_5=-1$일 때

$d=-2-a_5=-1$이므로 $a_n=-n+4$

$\sum_{k=1}^{8}a_k=-4,\ \sum_{k=1}^{8}|a_k|=16$이므로

$\sum_{k=1}^{8}|a_k|=\sum_{k=1}^{8}a_k+42$ …… ㉠

이 성립하지 않는다.

(ⅱ) a_5는 음이 아닌 정수일 때

$n\leq 5$일 때 $a_n\geq 0$이고 $|a_n|=a_n$

$n\geq 6$일 때 $a_n<0$이고 $|a_n|=-a_n$

㉠에서 $-a_6-a_7-a_8=a_6+a_7+a_8+42$

$a_6+a_7+a_8=-21$

$a_6+(a_6+d)+(a_6+2d)=-21$, $a_6+d=-7$

$a_6=-2$이므로 $d=-5$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $d=-5$이고 $a_1=a_6-5d=-2+25=23$이다.

따라서 $\sum_{k=1}^{8} a_k=\frac{8\times\{2\times 23+7\times(-5)\}}{2}=44$

6. 정답 ④

조건 (나)에서 $a_9=b_9=12$이므로

$a_5=a_9-4d=12-4d$

$a_6=a_9-3d=12-3d$

$b_{11}=b_9r^2=12r^2$

조건 (다)에서 $a_5+a_6=b_{11}$이므로

$(12-4d)+(12-3d)=12r^2$

$24-7d=12r^2$

$12(2-r^2)=7d$ …… ㉠

이때 $2-r^2$의 값은 0이 아닌 7의 배수이고, 조건 (가)에서

$r^2<100$이므로

$2-r^2=-7$ 또는 $2-r^2=-14$

즉, $r^2=9$ 또는 $r^2=16$

(ⅰ) $r^2=9$, 즉 $r=-3$ 또는 $r=3$일 때

㉠에서 $d=\frac{12(2-r^2)}{7}=-12$

$r=-3$일 때, $a_8+b_8=(a_9-d)+\frac{b_9}{r}=24+\frac{12}{-3}=20$

$r=3$일 때, $a_8+b_8=(a_9-d)+\frac{b_9}{4}=24+\frac{12}{3}=28$

(ⅱ) $r^2=16$, 즉 $r=-4$ 또는 $r=4$일 때

㉠에서 $d=\frac{12(2-r^2)}{7}=-24$

$r=-4$일 때, $a_8+b_8=(a_9-d)+\frac{b_9}{r}=36+\frac{12}{-4}=33$

$r=4$일 때, $a_8+b_8=(a_9-d)+\frac{b_9}{4}=36+\frac{12}{4}=39$

따라서 a_8+b_8의 최댓값은 39이고, 최솟값은 20이므로 그 합은

$39+20=59$

7. [정답] ②

[해설]

$b_2=-2$에서 $a_1-a_2=-2$ …… ㉠

$b_3+b_7=0$에서

$(a_1-a_2+a_3)+(a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-a_6+a_7)=0$ …… ㉡

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

㉠에서 $-d=-2$이므로 $d=2$

㉡에서 $(a+d)+(a+3d)=0$

$\therefore a=-4$

$b_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k$에서

$b_1=a_1=a$

$b_2=a_1-a_2=-d$

$b_3=a_1-a_2+a_3=a+d$

⋮

$b_9=a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-a_6+a_7-a_8+a_9$

$=a+4d$

$b_2+b_3=b_4+b_5=b_6+b_7=b_8+b_9=a$이므로

$\sum_{k=1}^{9}b_k=5a=-20$

8. [정답] ③

[해설]

첫째항과 공차가 정수인 등차수열 $\{a_n\}$은 모든 항이 정수이므로

$\sin(\pi a_n)=0$이고 $\cos(\pi a_n)$은 a_n이 홀수일 때 -1, 짝수일 때

1이므로

$$b_n=\begin{cases}-n+1 & (n\text{이 홀수})\\ n+1 & (n\text{이 짝수})\end{cases}$$

이때 $\sum_{n=1}^{7}b_n=3$이므로 수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공차가 모두 홀수일 때

$\sum_{n=1}^{7}b_n=0+3-2+5-4+7-6=3$

을 만족한다.

b_{48}, b_{50}은 짝수, b_{49}는 홀수이므로

$b_{48}+b_{49}+b_{50}=49-48+51=52$

9. 정답 48

풀이

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.

$a_1<0$이면 $S_1<0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

즉, $a_1>0$

또 $a_2<0$이면 $S_3=3a_2<0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

즉, $a_1>a_2>0$이므로 2이상의 자연수 k에 대하여

$S_k=M_1$이라 하면 $n\le k$일 때 $a_n>0$이고 $n>k+1$일 때

$a_n<0$이다.

(ⅰ) $S_k=M_1$, $S_{k-1}=M_2$, $S_{k+1}=M_3$인 경우

$M_1-M_2=S_k-S_{k-1}=a_k=2$

$M_2-M_3=S_{k-1}-S_{k+1}=-a_k-a_{k+1}=1$

즉, $a_{k+1}=-3$이므로

$d=-5$

이고

$a_1=a_k-(k-1)\times(-5)$

$=5k-3$

이때

$S_n=\frac{n\{2(5k-3)+(n-1)\times(-5)\}}{2}$

$=\frac{n(10k-5n-1)}{2}$

이므로 $S_n<0$에서

$n > 2k - \frac{1}{5}$

즉, $S_n < 0$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값이 $2k$이므로

자연수 n의 최솟값이 21이라는 조건을 만족시킬 수 없다.

(ii) $S_k = M_1$, $S_{k+1} = M_2$, $S_{k-1} = M_3$인 경우

$M_1 - M_2 = S_k - S_{k+1} = -a_{k+1} = 2$

이므로

$a_{k+1} = -2$

$M_2 - M_3 = S_{k+1} - S_{k-1} = a_{k+1} + a_k = 1$

이므로

$a_k = 3$이므로

즉, $d = -5$이고

$a_1 = a_k - (k-1) \times (-5) = 5k - 2$

이때

$$S_n = \frac{n\{2(5k-2) + (n-1) \times (-5)\}}{2}$$

$$= \frac{n(10k - 5n + 1)}{2}$$

이므로 $S_n < 0$에서

$n > 2k + \frac{1}{5}$

즉, $S_n < 0$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값이 $2k+1$이므로

$2k + 1 = 21$

$k = 10$

따라서

$a_1 = 5 \times 10 - 2 = 48$

10. [정답] 231

[출처] 2024년(2025학년도) 평가원 고3공통 06월 공통범위 22 [4.00점]

[해설]

$a_1 = -\alpha$, $a_2 = \alpha$라 하면

$a_3 = \alpha + 1$, $a_4 = \alpha + 2$

(i) $a_4 \le 0$, $a_9 \le 0$인 경우

$a_4 = \alpha + 2$ $(\alpha \le -2)$이므로 $\quad a_9 = \alpha + 7$ $(\alpha \le -7)$

$a_{15} = \alpha + 13$

$a_{15} = 1$이므로 $\quad \alpha + 13 = 1$

$\alpha = -12$이므로 $\quad a_1 = 12$

(ii) $a_4 \le 0$, $a_9 > 0$인 경우

$a_4 = \alpha + 2$ $(\alpha \le -2)$이므로 $\quad a_9 = \alpha + 7$

$a_9 > 0$이므로 $\quad \alpha > -7$

$a_{10} = a_9 - 3a_3 = \alpha + 7 - 3(\alpha + 1) = -2\alpha + 4$

$\therefore\ a_{15} = -2\alpha + 9$

$a_{15} = 1$이므로 $\quad -2\alpha + 9 = 1$

$\therefore\ \alpha = 4$

그런데 $\alpha \le -2$이므로 모순이다.

(iii) $a_4 > 0$, $a_9 \le 0$인 경우

$a_4 = \alpha + 2$이므로 $\quad \alpha > -2$

$a_5 = a_4 - 2a_2 = \alpha + 2 - 2\alpha = -\alpha + 2$

$a_9 = -\alpha + 6$이므로 $\quad \alpha \ge 6$

$\therefore\ a_{15} = -\alpha + 12$

$a_{15} = 1$이므로 $\quad -\alpha + 12 = 1$

$\therefore\ \alpha = 11$

$\therefore\ a_1 = -11$

(iv) $a_4 > 0$, $a_9 > 0$인 경우

$a_4 = \alpha + 2$에서 $\quad \alpha > -2$

$a_5 = a_4 - 2a_2 = \alpha + 2 - 2\alpha = -\alpha + 2$

$a_9 = -\alpha + 6$이므로 $\quad \alpha < 6$

$a_{10} = a_9 - 3a_3 = -\alpha + 6 - 3(\alpha + 1) = -4\alpha + 3$

$\therefore\ a_{15} = -4\alpha + 8$

$a_{15} = 1$이므로 $\quad -4\alpha + 8 = 1$

$\therefore\ \alpha = \frac{7}{4}$

$\therefore\ a_1 = -\frac{7}{4}$

이상에서 만족시키는 a_1은 12, -11, $-\frac{7}{4}$이므로 모든 a_1의 값의 곱은

$$12 \times (-11) \times \left(-\frac{7}{4}\right) = 231$$

11. [정답] 8

[해설]

조건 (나)에서 모든 자연수 n에 대하여

$$\left(a_{n+1} - a_n + \frac{2}{3}k\right)\left(a_{n+1} + ka_n\right) = 0$$

이므로

$$a_{n+1} - a_n = -\frac{2}{3}k \text{ 또는 } a_{n+1} = -ka_n$$

$a_1 = k$이고 $a_2 \times a_3 < 0$이므로 $a_2 = -k^2$이면 $a_3 = k^3$이어야 하고, $a_2 = \frac{k}{3}$이면 $a_3 = -\frac{k^2}{3}$ 또는 $a_3 = -\frac{k}{3}$이다. 따라서 이를 표로 나타내면 다음과 같다.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
k	$-k^2$	k^3	$-k^4$	0
k	$-k^2$	k^3	$k^3 - \frac{2}{3}k$	0
k	$\frac{k}{3}$	$-\frac{k^2}{3}$	$\frac{k^3}{3}$	0
k	$\frac{k}{3}$	$-\frac{k^2}{3}$	$-\frac{k^2}{3} - \frac{2}{3}k$	0
k	$\frac{k}{3}$	$-\frac{k}{3}$	$\frac{k^2}{3}$	0
k	$\frac{k}{3}$	$-\frac{k}{3}$	$-k$	0

(i) $a_4 = -k^4$일 때

$a_5 = k^5$ 또는 $a_5 = -k^4 - \frac{2}{3}k$이므로 $a_5 = 0$을 만족시키는 k는

존재하지 않는다.

(ii) $a_4 = k^3 - \frac{2}{3}k$일 때

(a) $a_5 = \left(k^3 - \frac{2}{3}k\right) \times (-k)$인 경우

$-k^2\left(k^2 - \frac{2}{3}\right) = 0 \qquad \therefore\ k^2 = \frac{2}{3}$

(b) $a_5 = \left(k^3 - \frac{2}{3}k\right) - \frac{2}{3}k$인 경우

$k^3 - \frac{4}{3}k = 0 \qquad \therefore\ k^2 = \frac{4}{3}$

(iii) $a_4 = \frac{k^3}{3}$ 일 때

$\frac{k^3}{3} - \frac{2}{3}k = 0 \qquad \therefore\ k^2 = 2$

(iv) $a_4 = -\frac{k^2}{3} - \frac{2}{3}k$일 때

$a_5 = 0$을 만족시키는 k는 존재하지 않는다.

(v) $a_4 = \frac{k^2}{3}$ 일 때

$\frac{k^2}{3} - \frac{2}{3}k = 0 \qquad \therefore\ k^2 = 4$

(vi) $a_4 = -k$인 경우

$a_5 = 0$을 만족시키는 k는 존재하지 않는다.

이상에서 조건을 만족시키는 모든 양수 k에 대하여 k^2의 값의 합은

$\frac{2}{3} + \frac{4}{3} + 2 + 4 = 8$

12. [정답] ④

[해설]

자연수 k에 대하여

$a_{n+1} = 3k$ 또는 $a_{n+1} = 3k - 1$ (k는 자연수)이면

$a_{n+1} \neq 3a_n + 1$이므로 $a_{n+1} = \frac{a_n}{n}$, $a_n = na_{n+1}$이다.

$a_6 = 2 = 3 \times 1 - 1$이므로 $a_5 = 5 \times 2 = 10$

$10 = 3 \times 3 + 1$이므로

$a_4 = 3$ 또는 $a_4 = 4 \times 10 = 40$

(i) $a_4 = 3$인 경우, $3 = 3 \times 1$이므로

$a_3 = 3 \times 3 = 9$, $a_2 = 2 \times 9 = 18$, $a_1 = 18$

(ii) $a_4 = 40$인 경우, $40 = 3 \times 13 + 1$이므로

$a_3 = 13$ 또는 $a_3 = 3 \times 40 = 120$

① $a_3 = 13$인 경우, $13 = 3 \times 4 + 1$이므로

$a_2 = 4$ 또는 $a_2 = 2 \times 13 = 26$

$a_2 = 4$인 경우, 2는 4의 약수이므로

$a_3 = \frac{4}{2} = 2$가 되어 $a_3 \neq 13$이다.

$a_2 = 26$인 경우, $a_1 = 26$

② $a_3 = 120$인 경우, $120 = 3 \times 40$이므로

$a_2 = 2 \times 120 = 240$, $a_1 = 240$

(i), (ii)에서 모든 a_1의 값의 합은

$18 + 26 + 240 = 284$

13. [정답] 34

[해설]

모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 조건 (가)에 의하여 다음이 성립한다.

$$a_n = \begin{cases} 2a_{n+1} & (a_{n+1}\text{이 홀수}) \\ 2a_{n+1} \text{ 또는 } a_{n+1} - 1 & (a_{n+1}\text{이 짝수}) \end{cases}$$

…… ㉠

$a_5 = 1$이므로 ㉠에 의하여 차례로 a_4, a_3, a_2, a_1을 구하면 다음과 같다.

$a_4 = 2$

$a_3 = 1$ 또는 $a_3 = 4$

(i) $a_3 = 1$일 때

$a_2 = 2$이므로 $\quad a_1 = 1$ 또는 $a_1 = 4$

(ii) $a_3 = 4$일 때

$a_2 = 3$ 또는 $a_2 = 8$

$a_2 = 3$이면 $a_1 = 6$이고 $a_2 = 8$이면 $a_1 = 7$ 또는 $a_1 = 16$

(i), (ii)에서 a_1의 값은 1, 4, 6, 7, 16이므로 모든 a_1의 값의 합은

$1 + 4 + 6 + 7 + 16 = 34$

14. [정답] ①

15. [정답] ②

[해설]

a_1이 자연수이고 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$ 또는 $a_{n+1} = (a_n - 1)^2$이므로 수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 음이 아닌 정수이다.

a_{n+1}의 값에 따라 가능한 a_n의 값은 다음과 같다.

(i) $a_{n+1} = (2k)^2$인 자연수 k가 존재하는 경우 $a_n = \sqrt{a_{n+1}} + 1$ 또는 $a_n = 2a_{n+1}$

(ii) $a_{n+1} = 1$인 경우, $a_n = 0$ 또는 $a_n = 2$

(iii) $a_{n+1} = 0$인 경우, $a_n = 1$

(iv) 그 외의 경우, $a_n = 2a_{n+1}$

(i)~ (iv)에 의하여 $a_7 = 1$이므로 $a_6 = 0$ 또는 $a_6 = 2$

(i) $a_6 = 0$인 경우

$a_5 = 1$이고 순서쌍 (a_4, a_3, a_2, a_1)은 $(0, 1, 0, 1)$ 또는 $(0, 1, 2, 4)$ 또는 $(2, 4, 3, 6)$ 또는 $(2, 4, 8, 16)$이므로 $a_1 = 1$ 또는 $a_1 = 4$ 또는 $a_1 = 6$ 또는 $a_1 = 16$

(ii) $a_6 = 2$인 경우

$a_5 = 4$이고 순서쌍 (a_4, a_3, a_2, a_1)은 $(3, 6, 12, 24)$ 또는 $(8, 16, 5, 10)$ 또는 $(8, 16, 32, 64)$이므로

$a_1 = 24$ 또는 $a_1 = 10$ 또는 $a_1 = 64$

따라서 (i), (ii)에 의하여

모든 a_1의 값의 합은

$1 + 4 + 16 + 6 + 24 + 10 + 64 = 125$

16. 정답 ④

(i) $a_4 = x$, x가 3의 배수일 때,

$a_5 = \frac{x}{3}$, $a_4 + a_5 = x + \frac{x}{3} = \frac{4}{3}x = 5$, $x = \frac{15}{4}$

3의 배수가 아니므로 조건에 맞지 않는다.

(ii) $a_4 = x$, x가 3의 배수가 아닐 때,

$a_5 = \frac{{a_4}^2 + 5}{3} = \frac{x^2 + 5}{3}$,

$a_4 + a_5 = x + \frac{x^2 + 5}{3} = 5$, $3x + x^2 + 5 = 15$

$x^2 + 3x - 10 = (x+5)(x-2) = 0$

$a_4 = 2$ 또는 -5

이제부터 a_3, a_2, a_1순으로 a, b, c라 하고, 각각의 경우에 3의 배수와 3의 배수가 아닐 때로 경우를 나눠 값을 구한다.

(㉠) $a_4 = 2$일 때,

a_3이 3의 배수일 때, $\frac{a_3}{3} = 2$, $a_3 = 6$,

a_3이 3의 배수가 아닐 때, $\frac{{a_3}^2 + 5}{3} = 2$, ${a_3}^2 = 1$, $a_3 = 1$, -1

(㉡) $a_4 = -5$일 때,

a_3이 3의 배수일 때, $\frac{a_3}{3} = -5$, $a_3 = -15$,

a_3이 3의 배수가 아닐 때, $\frac{{a_3}^2 + 5}{3} = -5$, ${a_3}^2 = -20$

∴ 가능한 a_3의 값은 6, 1, -1, -15,

(a) $a_3 = 6$일 때,

a_2가 3의 배수일 때, $\frac{a_2}{3} = 6$, $a_2 = 18$

a_2가 3의 배수가 아닐 때, $\frac{{a_2}^2 + 5}{3} = 6$, ${a_2}^2 = 13$, $a_2 = \pm\sqrt{13}$

(b) $a_3 = 1$일 때,

a_2가 3의 배수일 때, $\frac{a_2}{3} = 1$, $a_2 = 3$

a_2가 3의 배수가 아닐 때, $\frac{{a_2}^2 + 5}{3} = 1$, ${a_2}^2 = -2$

조건에 맞지 않는다.

(c) $a_3 = -1$일 때,

a_2가 3의 배수일 때, $\frac{a_2}{3} = -1$, $a_2 = -3$

a_2가 3의 배수가 아닐 때, $\frac{{a_2}^2 + 5}{3} = -1$, ${a_2}^2 = -8$,

조건에 맞지 않는다.

(d) $a_3 = -15$일 때,

a_2가 3의 배수일 때, $\frac{a_2}{3} = -15$, $a_2 = -45$

a_2가 3의 배수가 아닐 때, $\frac{{a_2}^2 + 5}{3} = -15$, ${a_2}^2 = -50$

조건에 맞지 않는다.

∴ 가능한 a_2의 값은 18, $\pm\sqrt{13}$, 3, -3, -45

① $a_2 = 18$일 때,

a_1이 3의 배수일 때, $\frac{a_1}{3} = 18$, $a_1 = 54$

a_1이 3의 배수가 아닐 때, $\frac{{a_1}^2 + 5}{3} = 18$, $a_1 = 49$, $a_1 = \pm 7$

a_1은 자연수이므로 $a_1 = 7$

② $a_2 = \pm\sqrt{13}$일 때,

a_1이 3의 배수일 때, $\frac{a_1}{3} = \pm\sqrt{13}$, $a_1 = \pm 3\sqrt{13}$

자연수가 아니므로 만족하지 않는다.

a_1이 3의 배수가 아닐 때, $\frac{{a_1}^2 + 5}{3} = \pm\sqrt{13}$

자연수가 아니므로 만족하지 않는다.

③ $a_2 = 3$

a_1이 3의 배수일 때, $\frac{a_1}{3} = 3$, $a_1 = 9$

a_1이 3의 배수가 아닐 때, $\frac{{a_1}^2 + 5}{3} = 3$, ${a_1}^2 = 4$, $a_1 = \pm 2$

a_1은 자연수이므로 $a_1 = 2$

④ $a_2 = -3$일 때,

a_1이 3의 배수일 때, $\frac{a_1}{3} = -3$, $a_1 = -9$

자연수가 아니므로 만족하지 않는다.

a_1이 3의 배수가 아닐 때, $\frac{{a_1}^2 + 5}{3} = -3$, ${a_1}^2 = -14$

자연수가 아니므로 만족하지 않는다.

⑤ $a_2 = -45$

자연수가 아니므로 만족하지 않는다.

∴ 54, 7, 9, 2, $54 + 7 + 9 + 2 = 72$

17. [정답] ③

[해설]

$a_4 \le 4$이면 $a_5 = 10 - a_4 = 5$에서 $a_4 = 5$이므로 $a_4 \le 4$를 만족시키지 않는다. 그러므로 $a_4 > 4$이고 $a_4 = a_5$에서 $a_4 = 5$이다.

$a_3 > 3$일 때, $a_3 = a_4$에서 $a_3 = 5$이고

$a_3 \le 3$일 때, $a_4 = 7 - a_3 = 5$에서 $a_3 = 2$이다.

(i) $a_3 = 5$인 경우

① $a_2 > 2$이면 $a_2 = a_3$에서 $a_2 = 5$이다.

$a_1 > 1$일 때, $a_1 = a_2$에서 $a_1 = 5$이고

$a_1 \le 1$일 때, $a_2 = 1 - a_1 = 5$에서 $a_1 = -4$이다.

② $a_2 \le 2$이면 $a_3 = 4 - a_2 = 5$에서 $a_2 = -1$이다.

$a_1 > 1$일 때, $a_1 = a_2 = -1$이므로 $a_1 > 1$을 만족시키지 않는다.

$a_1 \le 1$일 때, $a_2 = 1 - a_1 = -1$에서 $a_1 = 2$이므로 $a_1 \le 1$을 만족시키지 않는다.

(ii) $a_3 = 2$인 경우

① $a_2 > 2$이면 $a_2 = a_3$에서 $a_2 = 2$이므로 $a_2 > 2$를 만족시키지

않는다.

② $a_2 \leq 2$이면 $a_3 = 4 - a_2 = 2$에서 $a_2 = 2$이다.

$a_1 > 1$일 때, $a_1 = a_2$에서 $a_1 = 2$이고

$a_1 \leq 1$일 때, $a_2 = 1 - a_1 = 2$에서 $a_1 = -1$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a_1 = 5$ 또는 $a_1 = -4$ 또는 $a_1 = 2$ 또는 $a_1 = -1$이다. 따라서 구하는 모든 a_1의 값의 곱은

$5\times(-4)\times2\times(-1)=40$

18. 정답 ③

풀이

$$a_n = \begin{cases} a_{n+1} - 4 & (a_n\text{이 3의 배수가 아닌 경우}) \\ 3a_{n+1} & (a_n\text{이 3의 배수인 경우}) \end{cases}$$

이고, 수열 $\{a_n$RIGHT 항이 30 이하의 자연수이므로 $a_n > 0$이어야 한다.

$a_8 = 2$에서 $a_7 > 0$이어야 하므로

$a_7 = 3a_8 = 3\times2 = 6$

(ⅰ) $a_6 = a_7 - 4 = 6 - 4 = 2$인 경우

$a_5 > 0$이어야 하므로

$a_5 = 3a_6 = 3\times2 = 6$

㉠ $a_4 = a_5 - 4 = 6 - 4 = 2$일 때

$a_3 > 0$이어야 하므로

$a_3 = 3a_4 = 3\times2 = 6$

$a_2 = a_3 - 4 = 6 - 4 = 2$이면

$a_1 > 0$이어야 하므로

$a_1 = 3a_2 = 3\times2 = 6$

$a_2 = 3a_3 = 3\times6 = 18$이면

$a_1 \leq 30$이어야 하므로

$a_1 = a_2 - 4 = 18 - 4 = 14$

㉡ $a_4 = 3a_5 = 3\times6 = 18$일 때

$a_n \leq 30$이어야 하므로

$a_3 = a_4 - 4 = 18 - 4 = 14$

$a_2 = a_3 - 4 = 14 - 4 = 10$

이때 $a_2 - 4 = 10 - 4 = 6$은 3의 배수이므로

$a_1 = 3a_2 = 30$

(ⅱ) $a_6 = 3a_7 = 3\times6 = 18$인 경우

$a_n \leq 30$이어야 하므로

$a_5 = a_6 - 4 = 18 - 4 = 14$

$a_4 = a_5 - 4 = 14 - 4 = 10$

이때 $a_4 - 4 = 10 - 4 = 6$은 3의 배수이므로

$a_3 = 3a_4 = 3\times10 = 30$

마찬가지로 $a_n \leq 30$이어야 하므로

$a_2 = a_3 - 4 = 30 - 4 = 26$

$a_1 = a_2 - 4 = 26 - 4 = 22$

따라서 가능한 모든 a_1의 값의 합은

$6 + 14 + 30 + 22 = 72$

19. 정답 ④

조건 (가)에서 $a_{n+1} = a_n + 2$ 또는 $a_{n+1} = 2a_n$

$a_1 = 4$이므로 조건 (나)에 의하여 $a_2 = 2a_1 = 2\times4 = 8$

$a_3 = a_2 + 2 = 8 + 2 = 10$ 또는 $a_3 = 2a_2 = 2\times8 = 16$

(ⅰ) $a_3 = 10$인 경우

조건 (나)에 의하여

$a_4 = 2a_3 = 2\times10 = 20$

$a_5 = a_4 + 2 = 20 + 2 = 22$ 또는 $a_5 = 2a_4 = 2\times20 = 40$

$a_5 = 22$일 때,

조건 (나)에 의하여

$a_6 = 2a_5 = 2\times22 = 44$

$a_7 = a_6 + 2 = 44 + 2 = 46$ 또는 $a_7 = 2a_6 = 2\times44 = 88$

이므로 조건 (다)를 만족시키지 않는다.

$a_5 = 40$일 때,

조건 (나)에 의하여

$a_6 = 2a_5 = 2\times40 = 80$

조건 (다)에 의하여

$a_7 = 2a_6 = 2\times80 = 160$ …… ㉠

(ⅱ) $a_3 = 16$인 경우

조건 (나)에 의하여

$a_4 = 2a_3 = 2\times16 = 32$

$a_5 = a_4 + 2 = 32 + 2 = 34$ 또는 $a_5 = 2a_4 = 2\times32 = 64$

$a_5 = 34$일 때,

조건 (나)에 의하여

$a_6 = 2a_5 = 2\times34 = 68$

조건 (다)에 의하여

$a_7 = a_6 + 2 = 68 + 2 = 70$ …… ㉡

$a_5 = 64$일 때,

조건 (나)에 의하여

$a_6 = 2a_5 = 2\times64 = 128$

조건 (다)에 의하여

$a_7 = a_6 + 2 = 128 + 2 = 130$ …… ㉢

(ⅰ), (ⅱ)에서 주어진 조건을 만족시키는 경우는 ㉠, ㉡, ㉢의 세 가지 경우이므로

$M = 160$, $m = 70$

따라서 $M + m = 160 + 70 = 230$

20. 정답 ⑤

$k = 1$일 때, $a_1 = 2$이므로

$\{a_n\}$: 2, 2, 6, 10, 14, …

이고 $a_1 = a_2 = 2$

$k = 2$일 때, $a_1 = 6$이므로

$\{a_n\}$: 6, 2, 2, 6, 10, …

이고 $a_1 = a_4 = 6$

$k = 3$일 때, $a_1 = 10$이므로

$\{a_n\}$: 10, 6, 2, 2, 6, 10, 14, …

이고 $a_1 = a_6 = 10$

$k = 4$일 때, $a_1 = 14$이므로

$\{a_n\}$: 14, 10, 6, 2, 2, 6, 10, 14, $\cdots$
이고 $a_1=a_8=14$
이와 같은 과정을 반복하면
$a_1=4k-2$일 때 $a_1=a_{2k}$
$a_1=a_{20}$에서 $2k=20$
따라서 $k=10$
[참고]
$a_1=4k-2,\ a_2=4k-6,\ \cdots,\ a_k=4k-2-4(k-1)=2,$
$a_{k+1}=2,\ a_{k+2}=6,\ a_{k+3}=10,\ \cdots$
이므로 자연수 p에 대하여
$a_{k+p}=2+(p-1)\times4=4p-2$
$p=k$일 때, $a_{2k}=4k-2$이므로
$a_1=a_{2k}$

21. 정답 ①
$a_1=1,\ S_1=1$ 이므로 $\dfrac{S_1}{a_1}=\dfrac{1}{1}=1$
1은 자연수이므로 $a_2=a_1+1=1+1=2$
$a_2=2,\ S_2=3$이므로 $\dfrac{S_2}{a_2}=\dfrac{3}{2}$
$\dfrac{3}{2}$은 자연수가 아니므로 $a_3=a_2-1=2-1=1$
$a_3=1,\ S_3=4$이므로 $\dfrac{S_3}{a_3}=\dfrac{4}{1}=4$
4는 자연수이므로 $a_4=a_3+1=1+1=2$
즉, $a_4=2,\ S_4=6$
한편, 어떤 두 자연수 $p,\ q$에 대하여 $a_p=2,\ S_p=6q$이면
$\dfrac{S_p}{a_p}=\dfrac{6q}{2}=3q$
$3q$는 자연수이므로 $a_{p+1}=a_p+1=2+1=3$
$a_{p+1}=3,\ S_{p+1}=6q+3$이므로 $\dfrac{S_{p+1}}{a_{p+1}}=\dfrac{6q+3}{3}=2q+1$
$2q+1$은 자연수이므로 $a_{p+2}=a_{p+1}+1=3+1=4$
$a_{p+2}=4,\ S_{p+2}=6q+7$이므로 $\dfrac{S_{p+2}}{a_{p+2}}=\dfrac{6q+7}{4}$
$\dfrac{6q+7}{4}$은 자연수가 아니므로 $a_{p+3}=a_{p+2}-1=4-1=3$
$a_{p+3}=3,\ S_{p+3}=6q+10$이므로 $\dfrac{S_{p+3}}{a_{p+3}}=\dfrac{6q+10}{3}$
$\dfrac{6q+10}{3}$은 자연수가 아니므로 $a_{p+4}=a_{p+3}-1=3-1=2$
즉, $a_{p+4}=2,\ S_{p+4}=6q+12=6(q+2)$
$6(q+2)$는 6의 배수이므로
$$\begin{aligned}S_{p+4}&=S_p+(a_{p+1}+a_{p+2}+a_{p+3}+a_{p+4})\\&=S_p+(3+4+3+2)\\&=S_p+12\end{aligned}$$
그러므로 수열 $\{S_{4n}\}$은 첫째항이 $S_4=6$, 공차가 12인 등차수열이다.
따라서 $S_{4k}=6+(k-1)\times12=12k-6$이므로
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}S_{4k}&=\sum_{k=1}^{10}(12k-6)\\&=12\sum_{k=1}^{10}k-\sum_{k=1}^{10}6=12\times\frac{10\times11}{2}-6\times10=600\end{aligned}$$

22. 정답 34
$a_1=100$이고 6 이하의 모든 자연수 m에 대하여 $a_ma_{m+1}>0$이므로
수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 7항까지 모두 자연수이어야 한다.
$a_2=p$(p는 자연수)라 하면
$a_{n+2}=\begin{cases}a_n-a_{n+1} & (n\text{이 홀수인 경우})\\ 2a_{n+1}-a_n & (n\text{이 짝수인 경우})\end{cases}$에 의하여
$a_3=a_1-a_2=100-p$이므로
$a_3>0$에서 $100-p>0,\ p<100$ …… ㉠
$a_4=2a_3-a_2=2(100-p)-p=200-3p$이므로
$a_4>0$에서 $200-3p>0,\ p<\dfrac{200}{3}$ …… ㉡
$a_5=a_3-a_4=(100-p)-(200-3p)=2p-100$이므로
$a_5>0$에서 $2p-100>0,\ p>50$ …… ㉢
$a_6=2a_5-a_4=2(2p-100)-(200-3p)=7p-400$이므로
$a_6>0$에서 $7p-400>0,\ p>\dfrac{400}{7}$ …… ㉣
$a_7=a_5-a_6=(2p-100)-(7p-400)=-5p+300$이므로
$a_7>0$에서 $-5p+300>0,\ p<60$ …… ㉤
㉠~㉤에서 $\dfrac{400}{7}<p<60$
이때 $57<\dfrac{400}{7}<58$이므로 자연수 p의 값은 58 또는 59이다.
따라서
$p=58$일 때 $a_5=2\times58-100=16$,
$p=59$일 때 $a_5=2\times59-100=18$
이므로 a_5의 값의 합은
$16+18=34$

23. 정답 ②
조건 (나)에서
$a_{n+1}\geq a_n$이면 $a_{n+2}=\dfrac{a_{n+1}}{2}$이고, $a_{n+1}\geq2>0$이므로
$a_{n+2}<a_{n+1}$
$a_{n+1}<a_n$이면 $a_{n+2}=4a_{n+1}-4$이므로
$a_{n+2}-a_{n+1}=(4a_{n+1}-4)-a_{n+1}=3a_{n+1}-4$
이때 $a_{n+1}\geq 2$이므로 $3a_{n+1}-4\geq0$, 즉 $a_{n+2}\geq a_{n+1}$
그러므로 $a_{n+1}\geq a_n$이면 $a_{n+2}<a_{n+1}$이고,
$a_{n+1}<a_n$이면 $a_{n+2}\geq a_{n+1}$이다. …… ㉠
조건 (가)에서 $a_1=2$이고, 모든 항이 2이상이므로 $a_2\geq a_1$
그러므로 자연수 n에 대하여
$a_{n+2}=\begin{cases}\dfrac{a_{n+1}}{2} & (n\text{이 홀수인 경우})\\ 4a_{n+1}-4 & (n\text{이 짝수인 경우})\end{cases}$
$a_k=k,\ a_{k+m}=k+m$을 만족시키는 자연수 k와 5이하의 자연수

m의 값을 k가 홀수인 경우와 짝수인 경우로 나누어 찾아보자.

(i) k가 홀수인 경우

$a_k=k$에서

$a_{k+1}=4k-4$이고 $k+1=4k-4$, $k=\frac{5}{3}$

$a_{k+2}=\frac{4k-4}{2}=2k-2$이고 $k+2=2k-2$, $k=4$

$a_{k+3}=4(2k-2)-4=8k-12$이고 $k+3=8k-12$, $k=\frac{15}{7}$

$a_{k+4}=\frac{8k-12}{2}=4k-6$이고 $k+4=4k-6$, $k=\frac{10}{3}$

$a_{k+5}=4(4k-6)-4=16k-28$이고 $k+5=16k-28$,

$k=\frac{33}{15}$

(ii) k가 짝수인 경우

$a_k=k$에서

$a_{k+1}=\frac{k}{2}$이고 $k+1=\frac{k}{2}$, $k=-2$

$a_{k+2}=4\times\frac{k}{2}-4=2k-4$이고 $k+2=2k-4$, $k=6$

$a_{k+3}=\frac{2k-4}{2}=k-2$이고 $k+3=k-2$인 실수 k는 존재하지 않는다.

$a_{k+4}=4(k-2)-4=4k-12$이고 $k+4=4k-12$, $k=\frac{16}{3}$

$a_{k+5}=\frac{4k-12}{2}=2k-6$이고 $k+5=2k-6$, $k=11$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 k, m의 값은 $k=6$, $m=2$

따라서 $2k+m=2\times6+2=14$

[참고]

$a_2=\frac{9}{2}$, $a_3=\frac{9}{4}$, $a_4=5$, $a_5=\frac{5}{2}$, $a_6=6a_7=3$, $a_8=8$

김지형
대치예섬