Curtain Call

2025 ver.

수능대비 모의고사
정답 및 해설

온라인 배포용

LEE DAE EUN

저는 22학년도 이대은 선생님 수업을 들은 한 여학생입니다! 제가 수은쌤 수업을 들으면서 가장 좋았던 점은 크게 두가지로 꼽을 수 있습니다. 첫째로는 어떠한 문제가 나왔을때 이 문제에서 필요로 하는 개념, 떠올려야하는 풀이 방식이 어떤건지에 대해 정리해 주신다는 점입니다. 선생님의 이런 수업방식은 제가 처음 보는 문제를 풀 때, 이 문제에 어떤 개념이 들어가 있고 어떤 풀이방식을 적용해야하는지에 대한 풀이 방향을 잡아가는데 큰 도움이 되었습니다. 따라서 선생님을 믿고 공부를 해나가면서 선생님이 강조하시는 실전적인 풀이에 대해서 익힐 수 있었습니다. 둘째로는, 선생님이 학생을 대하는 방식입니다. 저는 수업시간에 질문하기를 두려워하는 학생이었습니다. 학생들의 수업참여를 유도하는 선생님의 수업방식은 제가 모르는부분에 대해서 적극적으로 이야기하고 질문할 수 있도록 만들어주셨습니다.
그 외에도 선생님께서 수업외의 시간에도 학생들에게 친근하게 다가와 고민을 들어주고 같이 고민해주신다는 점에서 학생을 위한 선생님이란 대은쌤을 보고 하는 말이 아닐까?라는 생각을 하게되었습니다. 문제 유형별로 풀이방식을 진행하는데 어려움을 겪거나 새로운 문제를 푸는데 체계가 뚜렷하지 않은 학생들에게 이대은 선생님의 수업을 추천합니다! 제 재수시간에 대은쌤이 함께해서 힘든시절이 찾아올 때마다 든든하게 다시 이겨낼 수 있었던 것 같습니다. 감사했습니다!!

쌤 오늘 마지막 당직이라는 스토리 봤어요ㅎㅎ 쌤 수업을 마지막까지 들었으면 좋았을텐데.. 아쉬운 마음이 커요.
그래도 전까지 배운거 잘 기억해서 열심히 엔제와 실모를 푸니 9평에서는 백분위 97을 받았어요
처음엔 스킬처럼 곁가지 내용들이 중요한 줄 알았는데, 수학을 더 하면 할수록 쌤이 알려주신 당위성을 찾고 불안하지 않게 확실히 답을 낼 수 있는 논리를 확립하는게 훨씬 더 중요하단 걸 깨달았어요. 너무 늦게 깨달았나요..ㅎㅎ?
9평 때 연락을 드리고 싶었는데 미처 못드렸고.. 수능 후에 과연 연락을 드릴 수 있을까 싶어 오늘 연락드립니다!
올 한해 정말 수고하셨습니다
마지막으로 저 수능 잘 볼 수 있도록 응원해주세요!

동시에 수업 내용 또한 기대를 넘어설 정도로 좋았습니다. 짧은 시간 내에 최대한 많은 정보를 주면서도 부담이 되지않는 수업 방식이었고, 잘못된 풀이 방식을 말씀해주시면서 제 풀이와 동일한 문제점을 발견하는 데에 큰 도움이 되었습니다.
무엇보다 ebs 자료가 너무 좋았습니다. 적절한 양과 그 옆에 개념 note, 중요한 문제가 선별되어 제가 딱 원하던 자료를 얻었으며, 수업 또한 원하던 수업 내용이었습니다.
수업에서는 단지 연계 교재의 학습뿐만 아니라 아, 수학은 이렇게 풀어야하는구나. 이런 방식으로 접근해야 하는구나. 라는 깨달음과 많은 것들을 배울 수 있었습니다.
저같은 경우는 문제가 주어지면 대부분 풀 수 있지만 시행착오나 돌아가는 풀이가 많아 시간 부족으로 손을 못 대는 문제가 많았습니다. 그 문제점을 간파하지 못한 채 수능장에 들어갈 수 있었던 저를 확실한 풀이 방법과 실전 개념을 집어넣어 구원해준 수업이였습니다. 이 글을 읽으실지는 모르겠지만, 선생님께 감사하다는 말씀을 전합니다.

선생님께서는 정말 친절하셨고, 수업 또한 훌륭했습니다. 저는 수능이 코앞이라 기회가 생길지 모르겠지만, 장기적으로 수능을 공부하는 분들께는 망설임없이 추천할 수 있습니다. 읽어주셔서 감사합니다.

재수하면서 이 선생님 듣고 6등급에서 2등급으로 올랐어요. 딱 7개월 걸렸어요.

실전 개념이 쓰이는 당위성을 대은T의 수업을 통해 배우며 문제 푸는데 큰 도움을 받았습니다. 굉장히 유익한 수업입니다!

수은쌤 수업 들었던 1인으로써 정말 좋습니다 항상 상냥하고 친절하게 가르쳐주시는 선생님입니다🤗대은쌤 파이팅!!

대은쌤 수업을 듣고 대학을 간 사람으로 써 한번 속아준다고 생각하고 들어보시면 후회하지 않으실꺼예요 그리고 무엇보다 재밌습니다😊
수업중에 졸 수가 없어요!

유튜브 오르비

수학 이대은T
현) 오르비학원 대치
*수강생 최대 1000% 증가
현) 대치명인학원 중계
현) 여주비상에듀기숙학원
*23, 24, 25년 수강생수 수학 1위

정답

2025학년도 커튼콜 온라인 배포용									
1	④	2	③	3	①	4	①	5	③
6	③	7	①	8	②	9	①	10	③
11	④	12	④	13	⑤	14	③	15	②
16	9	17	10	18	8	19	29	20	56
21	119	22	6						
확률과 통계									
23	④	24	⑤	25	⑤	26	④	27	①
28	①	29	17	30	795				
미적분									
23	②	24	④	25	②	26	⑤	27	②
28	②	29	162	30	1				

해설

1.

$$\log_2 16+\log_2 32=4+5$$
$$=9$$

2.

함수 $f(x)=x^2+5x+3$를 미분하면

$f'(x)=2x+5$

$\therefore\ f'(1)=7$

3.

$$\cos^2\left(\frac{2}{3}\pi\right)+\tan^2\left(\frac{5}{4}\pi\right)=\left(-\cos\frac{\pi}{3}\right)^2+\tan^2\frac{\pi}{4}$$
$$=\frac{3}{4}+1$$
$$=\frac{7}{4}$$

4.

$f(1)+\lim\limits_{x\to 3-}f(x)$에서

$f(1)=0,\ \lim\limits_{x\to 3-}f(x)=2$

이므로

$f(1)+\lim\limits_{x\to 3-}f(x)=2$

5.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 할 때,

$a_3a_5=(4+2d)(4+4d)=48;$

$2d^2+6d-8=0$

$d=1\ (\because\ a_n>0)$

$\therefore\ a_n=n+3$

$\therefore\ a_{10}=13$

6.

$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^3} = 0$이므로 다항함수 $f(x)$는 이차 이하의 차수를 갖는다.

이때, $\lim_{x \to 3} \frac{f(x)}{x-3} = 0$이므로 함수 $f(x)$는 $(x-3)$을 인수로 2개 이상 포함해야 하므로

$f(x) = (x-3)^2$

$\therefore\ f(6) = 3^2 = 9$

7.

함수 $y = a^x$를 x축의 양의 방향으로 2만큼 평행이동 시키면

$y = a^{x-2}$

이고, 여기서 y축 대칭이동을 시키면

$y = a^{-x-2}$

이다.

이때 함수 $y = a^{-x-2}$가 점 $(-1,\ 8)$를 지나야 하므로

$8 = a^{-(-1)-2} = a^{-1}$

$\therefore\ a = \frac{1}{8}$

8.

주어진 항등식에서 $x = 1$을 대입하면

$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = \frac{2}{3} + 2\int_{-1}^{1} f(t)\,dt;$

$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = -\frac{2}{3}$

이므로

$\int_{-1}^{x} f(t)\,dt = x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x$

이다.

정적분함수를 미분하면

$f(x) = 3x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$

이므로

$f(2) = 12 - \frac{8}{3} = \frac{28}{3}$

9.

운동방향이 바뀌는 순간은 속도가 0이 되는 순간으로 $v(t) = 0$의 실근이 a와 b가 된다.

$t^2 - 10t + 16 = 0;$

$t = 2,\ t = 8;$

$a = 2,\ b = 8$

따라서 구하는 이동거리는 넓이공식을 이용해 쉽게 구할 수 있다.

$$\int_{2}^{8} (t^2 - 10t + 16)dt = \frac{|1|(8-2)^3}{6}$$
$$= 36$$

10.

삼각형 ABC에서

$\overline{\mathrm{AB}} = c,\ \overline{\mathrm{BC}} = a,\ \overline{\mathrm{CA}} = b$

라 하고, 외접원의 반지름의 길이를 R이라 할 때 삼각형 ABC의 넓이 S는

$S = \frac{abc}{4R} = 2R^2 \sin\mathrm{A}\,\sin\mathrm{B}\,\sin\mathrm{C}$

이다.

따라서 주어진 넓이를 이용해 관계식에 대입해보면

$1 = \frac{abc}{4R};$

$1 = \frac{8}{4R};$

$R = 2$

이고 다른 넓이식에 대입하면

$1 = 8\sin\mathrm{A}\,\sin\mathrm{B}\,\sin\mathrm{C}$

$\therefore\ \sin\mathrm{A}\,\sin\mathrm{B}\,\sin\mathrm{C} = \frac{1}{8}$

11.

함수 $f(x)$가 $x = 1$에서 연속이므로

$$\lim_{x \to 1+} \frac{x^2 - bx + c}{x-1} = 6 + a$$

를 만족시킨다.

분수식의 극한의 특징을 이용하면

$1 - b + c = 0,\ 2 - b = 6 + a$

이다.

이때

$$x^2 - bx + c = x^2 - bx + (b-1)$$
$$= (x-1)(x-(b-1))$$

이므로

$$\frac{x^2-bx+c}{x-1}=x-(b-1)$$

이다.

$f(x)$는 증가함수이므로 $x=-1$에서 최소를 갖고,

$x=2$에서 최대를 갖는다.

$f(-1)=a-2,\ f(2)=3-b$

$\therefore\ M-m=f(2)-f(-1)=5-(a+b)=5+4=9$

12.

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a_1, 공비를 r이라 할 때,

$$\sum_{k=1}^{5}a_k=\frac{a_1(1-r^5)}{1-r}$$

이고, 모든 항이 정수이므로 a_1과 r이 정수이다.

$r=3$라면

$$\frac{a_1(1-r^5)}{1-r}=\frac{a_1\times 242}{2}<100$$

을 만족시키는 정수 a_1은 존재하지 않기 때문에

$r\geq 3$인 모든 정수 r에 대하여 조건을 만족시키는

a_1은 존재하지 않는다.

$r=-4$라면

$$\frac{a_1(1-r^5)}{1-r}=\frac{a_1\times 1025}{5}<100$$

을 만족시키는 정수 a_1도 존재하지 않기 때문에

$r\leq -4$인 모든 정수 r에 대하여 조건을 만족시키는

a_1은 존재하지 않는다.

$|a_1|\neq|a_2|$를 만족시키려면 공비 r이

$r\neq\pm 1$

이므로 조건을 모두 만족시키는 공비 r은

$r=-3,\ r=-2,\ r=2$

이다.

a_7이 최대려면 각각의 공비에서 첫째항이 가장 큰 경우끼리 비교해야 한다.

(ⅰ) $r=-3$

$$\frac{a_1(1-r^5)}{1-r}=\frac{a_1\times 244}{4}<100;$$

$244a_1<400$

$a_1=1$

$a_7=729$

(ⅱ) $r=-2$

$$\frac{a_1(1-r^5)}{1-r}=\frac{a_1\times 33}{3}<100;$$

$11a_1<100$

$a_1=9$

$a_7=576$

(ⅲ) $r=2$

$$\frac{a_1(1-r^5)}{1-r}=\frac{a_1\times 31}{1}<100;$$

$31a_1<100$

$a_1=3$

$a_7=192$

$\therefore\ M=729$

13.

주어진 극한식

$$\lim_{h\to 0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x)|}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0-}\frac{|f(-x)|-|f(-x+h)|}{h}$$

에서 내부에 들어 있는 함수의 형태를 보면

미분계수의 정의임을 의심하고 우변은

$$\lim_{h\to 0-}\frac{|f(-x)|-|f(-x+h)|}{h}$$
$$=-\lim_{h\to 0-}\frac{|f(-x+h)|-|f(-x)|}{h}$$

임을 이용하여 해석해보면 좌변은 x에서의

우극한이고, 우변은 $-x$에서의 좌극한의 음수배가 된다.

모든 실수 x에 대하여 만족시키는 항등식이므로 함수

$|f(x)|$의 미분계수가 x와 $-x$에 대하여 부호가

반대가 되어야 하므로 함수 $|f(x)|$의 도함수는

기함수임을 알 수 있다.

따라서 함수 $|f(x)|$는 우함수인데 삼차함수의

절댓값이 우함수가 되려면 함수 $f(x)$는 기함수여야 하므로

$f(x)=x^3+ax$ (a는 정수)

이다.

방정식 $f(x)=0$의 실근 중 적어도 하나가 열린구간

$(1,\ 2)$에 존재하려면

$f(1)<0,\ f(2)>0$

을 만족해야 하므로

$1+a<0,\ 8+2a>0;$

$-4<a<-1$

함수 $f(x)$의 모든 계수가 정수이므로

a는 -3 또는 -2

이다.

$f(x)=x^3+ax=0$을 만족하는 양의 실근이

$x=\sqrt{-a}$

이므로 비율관계를 이용하여 극소의 x좌표를 구하면

$x=\sqrt{\dfrac{-a}{3}}$

이므로

$f\left(\sqrt{\dfrac{-a}{3}}\right)=-\dfrac{a}{3}\times\sqrt{\dfrac{-a}{3}}+a\times\sqrt{\dfrac{-a}{3}}$

$=\dfrac{2}{3}a\sqrt{\dfrac{-a}{3}}$

에서 a에 -3과 -2를 대입하면 각각

$f(1)=-2,\ f\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)=-\dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

이므로 최솟값은 $a=-3$일 때인

-2

14.

일반적인 함수 $y=f(x)$에 대하여 부등식

$f(x)\le f(f(x))$에서 $f(x)=t$로 치환하면

$t\le f(t)$

이므로 두 함수 $y=x$와 $y=f(x)$ 중에서

$y=f(x)$가 위에 있는 구간이 해가 된다.

(ⅰ) $0<a<1$

$0<a<1$이면 함수 $f(x)$는 감소함수이고 부등식

$t\le f(t)$

의 해는 $f(\alpha)=\alpha$를 만족시키는 실수 α에 대하여

$t\le\alpha;$

$x\le\alpha$

가 된다.

두 함수 $f(x),\ g(x)$가 서로 역함수 관계임을 이용하면 부등식 $g(x)\le g(g(x))$ 의 해는

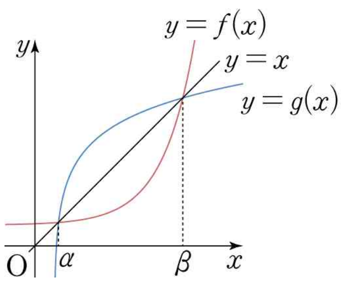
$x\le\alpha$

이다.

이때 $A\cap B=\{x|x\le\alpha\}$인 무한집합이므로 문제의 조건인 두 개의 원소만 포함할 수 없어서 모순이다.

(ⅱ) $a>1$

$a>1$인 증가함수 $f(x)$에 대하여 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 서로 역함수 관계로 그림과 같이 $y=x$보다 위에 있는 구간은 서로 반대가 된다.



따라서 부등식 $t\le f(t)$의 해는

$t\le\alpha,\ t\ge\beta;\ x\le\alpha,\ x\ge\beta$

이고, 부등식 $t\le g(t)$의 해는

$\alpha\le t\le\beta;\ \alpha\le x\le\beta$

이다.

$\therefore\ A\cap B=\{\alpha,\ \beta\}$

$\therefore\ \alpha=1,\ \beta=3$

이때, $f(\alpha)=\alpha,\ f(\beta)=\beta$ 또는 $f(\alpha)=\beta$, $f(\beta)=\alpha$를 만족해야 하는데 함수 $f(x)$가 증가함수이므로 $f(\alpha)=\beta,\ f(\beta)=\alpha$는 모순이다.

따라서 $f(\alpha)=\alpha,\ f(\beta)=\beta$이므로

$a^{1-b}=1,\ a^{3-b}=3$

이고, 두 식을 연립하면

$a^2=3;$

$a=\sqrt{3}$ ($\because\ a>0$)

$1-b=0;$

$b=1$

$\therefore\ ab=\sqrt{3}$

15.

주어진 항등식을 변형하면

$\dfrac{f(x+2)}{x}-\dfrac{f(x)}{x+2}=1;$

$(x+2)f(x+2)-xf(x)=x(x+2)$

이다.

$xf(x)$의 부정적분을 $F(x)$라 할 때

$(x+2)f(x+2)-xf(x)=x(x+2)$

의 양변을 x에 대하여 적분하면

$F(x+2)-F(x)=\dfrac{1}{3}x^3+x^2+C$

이므로

$\displaystyle\int_x^{x+2}tf(t)\,dt=$

$F(x+2)-F(x)=\dfrac{1}{3}x^3+x^2+C$

이다.

(나)조건을 이용하여 적분상수를 구하기 위해 $x=1$을 대입하면

$\displaystyle\int_1^3 tf(t)\,dt=\dfrac{1}{3}+1+C=\dfrac{4}{3};$

$C=0$

이다.

$\therefore$

$$\int_2^6 t\,f(t)\,dt = \{F(6)-F(4)\}+\{F(4)-F(2)\}$$

$$=\left(\frac{64}{3}+16\right)+\left(\frac{8}{3}+4\right)=44$$

16.

$\log_2 27\times\log_9 64=\log_2 64\times\log_9 27$

$$=6\times\frac{3}{2}$$

$$=9$$

17.

$f'(x)=-3x^2+6x+2$를 부정적분하면

$f(x)=-x^3+3x^2+2x+C$

이고, 주어진 $f(0)=6$를 이용해 적분상수 C를 구하면

$C=6$

이다. 따라서

$f(x)=-x^3+3x^2+2x+6$

$\therefore\ f(1)=-1+3\times1+2\times1+6$
$=10$

18.

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=2$에서 최고차항의 차수가 3이고 계수가 2임을 안다.

$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{(x-1)^2}=6$에서 다항함수 $f(x)$가 인수로 $(x-1)^2$을 갖으면

$f(x)=2(x-1)^2(x+a)$

$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to1}2(x+a)=6$

$\therefore\ a=2$

따라서

$f(2)=2(2-1)^2(2+2)=8$

19.

$n=1$을 대입하면

$a_1+a_2+a_3=6$

이므로 $a_2=3$, $a_3=1$을 이용하면

$a_1=2$

이다.

수열 $\{a_n\}$의 항을 나열해보면

2, 3, 1, 2, 3, 1, $\cdots$

이므로 주기의 크기가 3인 주기수열이다.

$$\sum_{k=1}^{14}a_k=(a_1+a_2+a_3)\times4+a_{13}+a_{14}$$

$$=(a_1+a_2+a_3)\times4+a_1+a_2$$

$$=(2+3+1)\times4+2+3=29$$

20.

함수 $g(x)$가 3이 아닌 모든 실수 x에 대하여 극한값이 존재하려면

$x^2-x-6=0$;

$(x+2)(x-3)=0$;

$x=-2,\ 3$

에서만 $f(x)=0$가 실근을 가질 수 있다.

이때 $\displaystyle\lim_{x\to3}g(x)=\infty$를 만족시키려면

$f(3)=0$

을 만족시켜야 하고, ∞로 발산하려면 $f(x)$가 $(x-3)$을 인수로 홀수개 가져야 하므로

$f(x)=(x-3)^3(x+2)$

이다.

$\therefore\ f(5)=2^3\times7=56$

21.

함수 $y=\sin\dfrac{x}{2}$의 주기는 4π로 $0\le x<2\pi$에는 함수의 반주기가 들어가고 $x=\pi$에 대칭인 선대칭함수이므로

$\alpha+\beta=2\pi$

를 만족시킨다.

$\sin(\beta-\alpha)=\dfrac{1}{2}$를 만족시키는 $\beta-\alpha$는

$\beta-\alpha=\dfrac{\pi}{6}$ 또는 $\dfrac{5}{6}\pi$

이다.

(i) $\beta-\alpha=\dfrac{\pi}{6}$

$\alpha+\beta=2\pi$와 연립하면

$\alpha=\dfrac{11}{12}\pi,\ \beta=\dfrac{13}{12}\pi$

이므로

$\alpha\beta=\dfrac{143}{144}\pi^2$

(ii) $\beta-\alpha=\frac{5}{6}\pi$

$\alpha+\beta=2\pi$와 연립하면

$\alpha=\frac{7}{12}\pi,\ \beta=\frac{17}{12}\pi$

$\alpha\beta=\frac{119}{144}\pi^2$

따라서 $m=\frac{119}{144}\pi^2$

$\therefore\ \frac{144m}{\pi^2}=119$

22.

주어진 관계식 $a_{n+1}+a_n=\sum_{k=2}^{n}ka_{k-1}$에서 n대신 $n-1$을 대입하여 차를 구하면

$a_{n+1}-a_{n-1}=na_{n-1}$;

$a_{n+1}=(n+1)a_{n-1}\ \ n\ge 3$

$a_{n+1}+a_n=\sum_{k=2}^{n}ka_{k-1}$에 $n=2$을 대입하여 얻은 값과 $a_{n+1}=(n+1)a_{n-1}$에 $n=2$를 대입하여 얻은 값을 비교하면 주어진 $a_1=-2,\ a_2=2$을 만족하므로

$a_{n+1}=(n+1)a_{n-1}\ \ n\ge 2$

이 만족함을 알 수 있다.

주어진 $a_1=-2,\ a_2=2$를 이용해 일반항을 구하면

$a_{n+1}=(n+1)a_{n-1}=(n+1)(n-1)a_{n-3}=\cdots$

이므로 n이 홀수냐 짝수냐에 따라 일반항을 구해보면

$a_{2n}=2n\times(2n-2)\times\cdots\times4\times a_2,$

$a_{2n+1}=(2n+1)\times(2n-1)\times\cdots\times3\times a_1$

이므로 $a_{2n+1}\times a_{2n}$은

$a_{2n+1}\times a_{2n}=(2n+1)!\times\frac{a_1a_2}{2}=-(2n+1)!\times 2$

$\frac{a_{2n+1}\times a_{2n}}{2^{11}}$가 정수려면 $(2n+1)!$이 2를 10개 이상 가져야 한다.

짝수들은 무조건 2를 약수로 갖고, 2의 거듭제곱들의 배수들을 2개 이상씩 가질 수 있다.

수의 나열을 통해 2가 적어도 10개가 포함되는 순간을 파악하면 12!부터이다.

따라서

$2n+1\ge 12$;

$n\ge\frac{11}{2}$

따라서 자연수 n은 6부터 $\frac{a_{2n+1}\times a_{2n}}{2^{11}}$가 정수이다.

$\therefore\ \alpha=6$

확률과 통계

23.

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \frac{3}{5}\right)$을 따르므로 분산 $\mathrm{V}(X)$은

$\mathrm{V}(X)=100\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}$

$=24$

24.

$\frac{b}{a}$가 자연수인 경우를 구하기 더 편하므로

$a=1$인 경우 $b=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$

$a=2$인 경우 $b=2,\ 4,\ 6$

$a=3$인 경우 $b=3,\ 6$

$a=4$인 경우 $b=4$

$a=5$인 경우 $b=5$

$a=6$인 경우 $b=6$

총 14가지이다.

따라서 구하는 확률 P는

$\mathrm{P}=1-\frac{14}{36}$

$=\frac{11}{18}$

25.

5개의 문자 $a,\ b,\ c,\ d,\ e$에서 마지막에 a가 와야 하므로 나머지 4개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수만 구하면 된다.

$4!=24$

26.

주사위를 던져서 나올 수 있는 수들은

1, 2, 3, 4, 5, 6

으로 전체 경우의 수는

6^3

이고, $a\le b\le c$를 만족시키는 경우의 수는

중복조합을 이용하면

${}_{6}\mathrm{H}_{3}$
이다.
따라서 확률은

$$\frac{{}_{6}\mathrm{H}_{3}}{6^3}=\frac{{}_{8}\mathrm{C}_{3}}{6^3}$$
$$=\frac{7}{27}$$

27.

이산확률분포에서 확률의 합은 1이기 때문에

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{f(n)}=\frac{1}{f(n)}\sum_{k=1}^{n}k$$
$$=\frac{1}{f(n)}\times\frac{n(n+1)}{2}=1$$
$$\therefore\ f(n)=\frac{n(n+1)}{2}$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{10}f(n)=\sum_{n=1}^{10}\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{10}n^2+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{10}n$$
$$=\frac{385+55}{2}$$
$$=220$$

28.

집합 $A=\{x\mid a_1\le x\le a_2\}$,
$B=\{x\mid b_1\le x\le b_2\}$에서 $A\subset B$를 만족하려면
$a_1\ge b_1$이고 $a_2\le b_2$
를 만족하면 된다.
최종적으로 구간을 이루는 수들의 종류가 2개, 3개, 4개인 경우로 나누어 각각 구해야 한다.
(ⅰ) 2개인 경우
수들의 종류가 2가지이면 $a_1=b_1$와 $a_2=b_2$를 만족하는 경우이고 만족하는 경우의 수는 10개의 수들 중에서 2개를 고르면 된다.
${}_{10}\mathrm{C}_{2}$
(ⅱ) 3개인 경우
수들의 종류가 3가지이면 $a_1=b_1$와 $a_2<b_2$이거나 $a_1<b_1$와 $a_2=b_2$인 경우이다. 두 경우 모두 a_1, a_2, b_1, b_2의 대소관계가 정해져 있기 때문에
${}_{10}\mathrm{C}_{3}\times 2$
(ⅲ) 4개인 경우
수들의 종류가 4가지이면 $a_1>b_1$와 $a_2<b_2$를 만족하는 경우이고 a_1, a_2, b_1, b_2의 대소관계가 정해져 있기 때문에
${}_{10}\mathrm{C}_{4}$
따라서 구하는 확률 P는

$$\mathrm{P}=\frac{{}_{10}\mathrm{C}_{2}+2\times{}_{10}\mathrm{C}_{3}+{}_{10}\mathrm{C}_{4}}{({}_{10}\mathrm{C}_{2})^2}$$
$$=\frac{45+2\times120+210}{45^2}$$
$$=\frac{11}{45}$$

29.

조건으로 X와 Y의 평균이 주어졌기 때문에
확률분포표를 이용하여 각각의 평균을 표현하면

$$\mathrm{E}(Y)=\sum_{k=1}^{n}k\times f(k)$$
$$\mathrm{E}(X)=\sum_{k=1}^{n}k\times f(n-k+1)$$

여기서 시그마를 풀어서 표현하면
$\mathrm{E}(X)=f(n)+2f(n-1)+3f(n-2)+\cdots+nf(1)$
더하는 방향을 반대로 더하면
$\mathrm{E}(X)$
$=nf(1)+(n-1)f(2)+(n-2)f(3)+\cdots+f(n)$

$$=\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)\times f(k)$$
$$=n\sum_{k=1}^{n}f(k)-\sum_{k=1}^{n}k\times f(k)+\sum_{k=1}^{n}f(k)$$

$=n-\mathrm{E}(Y)+1$
따라서 $\mathrm{E}(Y)=10$와 $\mathrm{E}(X)=8$을 이용하면
$8=n-10+1$;
$n=17$

30.

3명의 학생이 각각 챙겨갈 각각 과자의 수를
a_i, b_i, c_i라 하면
(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), (a_3, b_3, c_3)
이고,
$a_1+a_2+a_3\le 1$, $b_1+b_2+b_3\le 3$, $c_1+c_2+c_3\le 3$
를 만족한다.
부등식을 방정식으로 바꾸기 위해 문자 d를 추가하면
$a_1+a_2+a_3+d=1$, $b_1+b_2+b_3+d=3$,
$c_1+c_2+c_3+d=3$
가 되는데 1개 이상 챙겨감을 만족시키기 위해

포함배제를 이용한다.
전체 경우의 수에서 빼야 하는 상황은 적어도 한 명이 과자를 챙겨가지 않는 경우의 수이다.
(i) 전체 경우의 수
각각 방정식을 중복조합을 이용해 나타내면
${}_4H_1 \times {}_4H_3 \times {}_4H_3$ …… ㉠
(ii) 한 명이 과자를 챙기지 않는 경우
받지 않을 한 명을 골라주고 방정식에서 문자를 하나 제거하면 된다.
${}_3C_1 \times {}_3H_1 \times {}_3H_3 \times {}_3H_3$ …… ㉡
(iii) 두 명이 과자를 챙기지 않는 경우
과자를 챙기지 않을 두 명을 골라주고 방정식에서 문자 두 개를 제거하면 된다.
${}_3C_2 \times {}_2H_1 \times {}_2H_3 \times {}_2H_3$ …… ㉢
(iv) 세 명이 과자를 챙기지 않는 경우
모두 과자를 챙기지 않는 경우는 한 가지이므로
1 …… ㉣
포함배제를 이용하기 위해
㉠−㉡+㉢−㉣
이므로
$1600-900+96-1=795$

미적분

23.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+12n}-2n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{12n}{\sqrt{4n^2+12n}+2n}$$
$$=3$$

24.

$y=x^x$에서 양변에 로그를 취하면
$\ln y = x\ln x$
이고 양변을 미분하여 y'를 구하면
$$\frac{y'}{y}=\ln x+1;$$
$$y'=x^x(\ln x+1)$$
이다. 따라서 $x=1$에서의 접선의 기울기 m은
$m=1$
이므로 $(1, 1)$을 지나며 기울기가 1인 접선의 방정식 $f(x)$는
$f(x)=(x-1)+1=x$
$\therefore f(8)=8$

25.

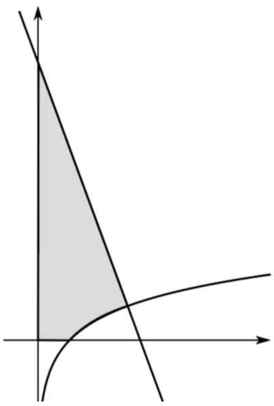
$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x+2)\cos x\,dx$는 적분구간이 원점에 대해 대칭이므로 우함수나 기함수를 의심해야 한다.
$x\cos x$는 기함수와 우함수의 곱으로 기함수이다.
따라서
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x+2)\cos x\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos x\,dx$$
$$=4\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=4$$

26.

속력을 구하기 위해 x, y를 t에 대해 미분하면
$x'=3t^2+\frac{3}{t^2}$, $y=t+\frac{1}{t}$
이므로 속력 v를 나타내면
$$v=\sqrt{\left(3t^2+\frac{3}{t^2}\right)^2+\left(t+\frac{1}{t}\right)^2}$$
이다.
이때, $\left(3t^2+\frac{3}{t^2}\right)$와 $\left(t+\frac{1}{t}\right)$를 산술기하평균을 이용하면
$$3t^2+\frac{3}{t^2}\ge 2\sqrt{3t^2\times\frac{3}{t^2}},\ t+\frac{1}{t}\ge 2\sqrt{t\times\frac{1}{t}}$$
으로 $t=1$에서 동시에 등호가 성립하므로
$$v=\sqrt{\left(3t^2+\frac{3}{t^2}\right)^2+\left(t+\frac{1}{t}\right)^2}$$
$$\ge\sqrt{(2\times3)^2+(2\times1)^2}$$
$$=2\sqrt{10}$$

27.

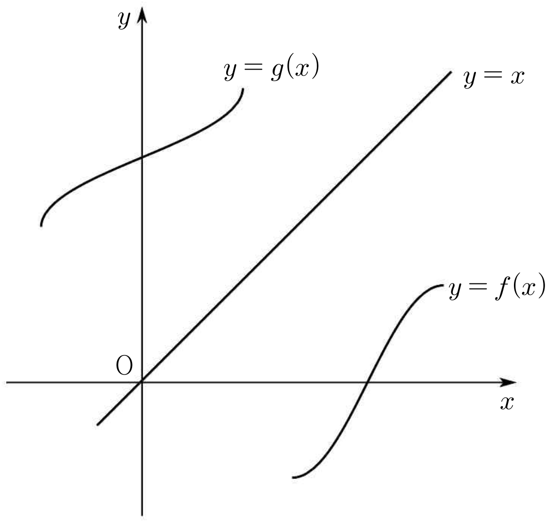
함수 $y=\ln x$ 위의 점 P에서의 법선의 방정식은
$y=-e(x-e)+1$
이다.
따라서 주어진 영역을 사다리꼴의 넓이에서
$y=\ln x$와 x축으로 둘러싸인 넓이를 빼면



$$\frac{1}{2}\times\{(e^2+1)+1\}\times e-\int_1^e \ln x\,dx$$
$$=\frac{e}{2}(e^2+2)-\Big[x\ln x-x\Big]_1^e$$
$$=\frac{e}{2}(e^2+2)-1$$
$$=\frac{e^3}{2}+e-1$$

28.

$\dfrac{f'(p)-g'(q)}{1+f'(p)g'(q)}$가 삼각함수의 덧셈정리임을 파악하면 두 함수의 접선 사이의 각도에 대한 tan값을 의미함을 알 수 있다.



(i) $\left|\dfrac{f'(p)-g'(q)}{1+f'(p)g'(q)}\right|$의 최솟값

우선 m을 구하는 과정은 절댓값의 최솟값은 항상 0이기 때문에 0인 순간을 의미하는 두 함수의 접선의 기울기가 동일한 값을 갖는 경우가 존재하는지 파악해야 한다.

열린구간 $\left(\dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi\right)$에서 함수 $f(x)$의 접선의 기울기는

$1<f'(x)\leq 2$

을 만족하기 때문에 $f'(x)=1$을 만족하는 점이 존재한다.

따라서

$f'(x)=g'(f(x))=1$

을 만족하는 점에서 두 직선이 평행하기 때문에

$\left|\dfrac{f'(p)-g'(q)}{1+f'(p)g'(q)}\right|$의 최솟값은

0

보다 커야 하므로

$m<0$

(ii) $\left|\dfrac{f'(p)-g'(q)}{1+f'(p)g'(q)}\right|$의 최댓값

두 직선이 이루는 각의 최댓값이나 최솟값이 되는 순간이 M이 되는데 두 점 $(p,\ f(p))$, $(q,\ g(q))$이 각각의 접선의 기울기가 이루는 각의 최대는 $(p,\ f(p))$에서의 접선의 기울기와 $y=x$의 기울기와의 각이 최대가 되는 순간을 찾으면 된다.

따라서

$1\leq f'(x)\leq 2$

를 만족하는 함수 $y=f(x)$ 위에 $p=\dfrac{3}{2}\pi$에서 최대가 된다.

$f'(p)=2,\ g'(q)=\dfrac{1}{2}$

이므로

최댓값은

$$\frac{2-\frac{1}{2}}{1+2\times\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}$$

이므로

$M\geq\dfrac{3}{4}$

따라서 $M-m$의 최솟값은

$M-m=\dfrac{3}{4}-0=\dfrac{3}{4}$

$\therefore\ a=\dfrac{3}{4}$

$\therefore\ 80a=80\times\dfrac{3}{4}=60$

29.

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 할 때

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=6;$

$\dfrac{|a|}{1-|r|}=6$ …… ㉠

이다.

수열 $\{b_n\}$은 $b_n=a_n+|a_n|$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}=0;$

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n}+|a_{2n}|)=0;$

$a_{2n}<0;$

$a>0,\ r<0$ 또는 $a<0,\ r>0$

이다.

이때 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=9$를 만족시키려면

$a<0,\ r>0$

인 경우는 모순이 나온다.

따라서

$a>0,\ r<0$

이다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+|a_{2n-1}|)$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$$

$$=2\times\frac{a}{1-r^2}$$

이므로

$2\times\dfrac{a}{1-r^2}=9$

이고 ㉠을 이용하면

$\dfrac{a}{1+r}=6$

이고 위 두 식을 연립하면

$$2\times\frac{a}{1-r^2}=2\times\frac{1}{1-r}\times\frac{a}{1+r}$$

$$=12\times\frac{1}{1-r}$$

$12\times\dfrac{1}{1-r}=9;$

$r=-\dfrac{1}{3}$

$\therefore\ r=-\dfrac{1}{3},\ a=4$

$b_5=2a_5$

$$=2\times4\times\left(-\frac{1}{3}\right)^4$$

$$=\frac{8}{81}$$

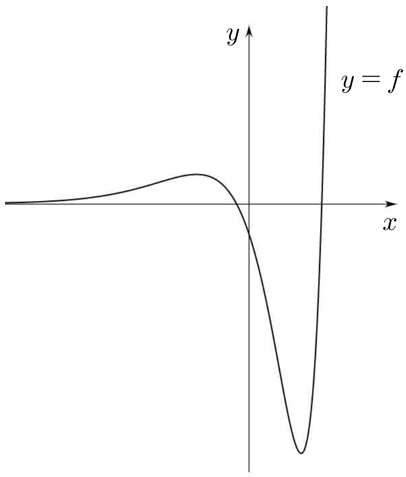
$\therefore\ \dfrac{16}{b_5}=16\times\dfrac{81}{8}=162$

30.

함수 $f(x)=(x^2-2x-1)e^x$를 미분을 이용해

그래프를 그리면

다음과 같은 그림이 된다.



함수 $g(x)$의 형태를 보면 $x=t$를 경계로 오른쪽은 $f(x)$를 따르고 왼쪽은 접선을 따름을 알 수 있다.

(가) 조건을 만족시키려면 x축과의 교점의 개수가 2 이상이어야 하므로 t는 극솟점의 x좌표보다 작아야 한다.

(나) 조건을 만족시키는 넓이를 의미하는

$\int_{a_1}^{a_2}|g(x)|dx$가 최솟값을 갖는 상황은 두 변곡점에서 그은 접선을 먼저 의심해야 한다.

그래프를 통해 두 변곡점에서의 접선의 x좌표가 t일 때 넓이를 비교해보면 왼쪽 변곡점의 x좌표가 t인 경우는 오른쪽 변곡점의 x좌표가 t인 경우의 넓이를 포함한다.

따라서 $\int_{a_1}^{a_2}|g(x)|dx$가 최소가 되는 순간은 실수 t가 오른쪽 변곡점의 x좌표가 같아지는 순간임을 알 수 있다.

$f'(x)=(x^2-3)e^x$

$f''(x)=(x^2+2x-3)e^x$

이므로 $x=1$이 오른쪽 변곡점의 x좌표이므로

$\alpha=1$
이고
$f'(1)=-2e,\ f(1)=-2e$
이므로 접섭의 방정식은
$y=-2ex$
이다.
접섭의 x절편이 $a_1(1)$이므로
$a_1(1)=0$
$\therefore\ \alpha+a_1(\alpha)=1+0=1$

curtain call

LEE DAE EUN