제 2 교시

수학 영역

공통

1	③	2	③	3	②	4	⑤	5	②
6	④	7	⑤	8	④	9	③	10	①
11	②	12	④	13	③	14	①	15	⑤
16	5	17	4	18	16	19	17	20	13
21	75	22	28						

예상 1등급컷

확률과 통계 : 84, 미적분 : 80, 기하 : 82

〈코멘트〉

공통의 난이도는 25학년도 6월 평가원 모의고사보다 약간 높았습니다. 전반적으로 익숙한 소재를 사용했지만 약간의 형식적, 내용적 변주가 조금씩 들어가 학생들에게 생소하게 느껴질 수 있었습니다.

10번 : 묵묵히 계산하여 풀어낼 수도 있었지만 등비수열 합 공식의 구성요소와 구조에 대한 관찰을 통해서 해결하면 좋았습니다.

11번 : 필연적으로 극한에 대해 확인할 것들을 잘 따라가면 해결할 수 있었습니다.

12번 : 주어진 방정식을 그래프로 관찰할 때, 어떤 부분을 하나의 함수로 생각하고 그릴지 선택하고, 점대칭의 상황을 발견하여 해결할 수 있었습니다.

13번 : 익숙한 실근 개수 함수가 등장하고, 주어진 방정식의 실근의 개수가 무수히 많지 않도록 하기 위해서는 특수한 경우임을 생각할 수 있었습니다.

14번 : 원주각과 사인법칙을 통해 각 정보를 이동시키는 것이 핵심이었습니다. 원 위에 다른 원의 중심이 있다는 정보를 삼각형의 닮음으로 해석할 수 있었습니다.

15번 : 본 시험지 공통에서 가장 어려운 문제였다고 생각합니다. 함수의 한 부정적분의 그래프를 그리고, 대칭성과 평행이동을 고려한 직선의 기울기 파악과 적절한 계산을 요했습니다.

20번 : 주어진 수열의 추이를 전체적으로 파악한 뒤, 몇 개의 항이 겹치는 상황을 연상해 볼 수 있었습니다.

21번 : 일차원 운동에 관한 개념어 이해와, 점 X가 오직 하나 존재함에서 위치함수의 극솟값이 오직 하나임을 알 수 있었습니다.

22번 : 삼각함수의 그래프를 그리고, 그 최대 최소를 관찰하는 문항이었습니다. 경계가 되는 자연수 n값을 확인하는 것이 포인트였습니다.

1. [정답] ③ 4

[해설]

구하는 값은 $\left(\dfrac{2^{\sqrt{3}}}{2}\right)^{\sqrt{3}+1} = 2^{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = 2^2 = 4$이다.

2. [정답] ③ 3

[해설]

함수 $f(x) = x^4 - x$를 x에 대하여 미분하면

$f'(x) = 4x^3 - 1$이므로 구하는 값은 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1} = f'(1) = 3$이다.

3. [정답] ② 6

[해설]

주어진 조건에 의하여

$$\sum_{k=1}^{10}(k^2+k+a) = 500$$

$$= \frac{10\times11\times21}{6} + \frac{10\times11}{2} + 10a$$

$$= 440 + 10a$$

이므로 구하는 값은 $a = 6$이다.

4. [정답] ⑤ -2

[해설]

함수 $g(x)$를

$$g(x) = (2x-1)f(x)$$

라 하면 $g(1) = f(1) = 1$이다. 함수 $g(x)$를 x에 대하여 미분하면

$$g'(x) = 2f(x) + (2x-1)f'(x)$$

$$\Rightarrow g'(1) = 2f(1) + f'(1)$$

이므로 구하는 값은 $f'(1) = -2$이다.

5. [정답] ② $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

[해설]

$\tan(\pi-\theta) = -\tan\theta = 3$, $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta$이고,

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\Rightarrow \tan^2\theta + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\Rightarrow \cos^2\theta = \frac{1}{10}$$

이다. 이때 $\sin\theta < 0$이므로, θ는 제4사분면의 각이고,

$\cos\theta > 0$이다. 따라서 구하는 값은 $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$이다.

6. [정답] ④ 17

[해설]

함수 $f(x)$에 대하여

$$f(2)-f(0)=\int_0^2 f'(x)dx$$

$$\Rightarrow f(2)+1=\left[\frac{f(2)}{3}x^3-x^2\right]_0^2$$

$$\Rightarrow f(2)+1=\frac{8}{3}f(2)-4$$

$$\Rightarrow f(2)=3,\ f(x)=x^3-x^2-1$$

이므로 구하는 값은 $f(3)=3^3-3^2-1=17$이다.

7. [정답] ⑤ 3

[해설]

수열의 합과 일반항 사이의 관계에 의하여

$$S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$$

이므로, 구하는 값은 $\sum_{k=1}^{14} S_{k+1}=\sum_{k=1}^{14}\log_2\frac{n+2}{n+1}=3$이다.

8. [정답] ④ 34

[해설]

주어진 조건에 의하여 $f(1)=2,\ f'(1)=0$이다. 따라서

함수 $f(x)$에 대하여

$$f(1)=1+3+a+b=2$$

$$f'(1)=3+6+a=0$$

$$\Rightarrow a=-9,\ b=7,\ f'(x)=3(x-1)(x+3)$$

이므로 구하는 값은 $f(3)=-27+27-3a+b=34$이다.

9. [정답] ③ 26

[해설]

step Ⅰ : 주어진 접선의 방정식에서 정보를 뽑아내자.

직선 $y=f'(5)(x-6)+6$는 기울기가 $f'(3)$이고 점 $(3,\ f(3))$을 지나는 직선이므로,

$$f'(3)=f'(5),\ f(3)=f'(3)\times(-3)+6$$

임을 알 수 있다.

step Ⅱ : 함수의 식을 세우자.

함수 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이고 $f'(3)=f'(5)$이므로 그 그래프는 직선 $x=4$에 대하여 대칭이다.

$f'(x)=3(x-4)^2+p$라 하고, 이를 x에 대하여 적분하면

$$f(x)=(x-4)^3+p(x-4)+q$$

이다. 이때, 얻은 조건에 의하여

$$f(0)=0$$

$$=(-4)^3+p\times(-4)+q$$

$$\Rightarrow -4p+q=64$$

이고,

$$f(3)=f'(3)\times(-3)+6$$

$$\Rightarrow (-1)^3+p\times(-1)+q=(3+p)\times(-3)+6$$

$$\Rightarrow 2p+q=-2$$

임을 알 수 있고, 이를 변끼리 빼면

$$6p=-66$$

$$\Rightarrow p=-11,\ q=20$$

$$\Rightarrow f(x)=(x-4)^3-11(x-4)+20$$

을 얻는다. 따라서 구하는 값은

$f(1)=(-3)^3-11\times(-3)+20=26$이다.

[별해]

삼차함수의 비율관계를 이용하여 해석하자.

변곡점의 x좌표가 4이므로 삼차함수의 비율관계에 의하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(3,\ f(3))$에서의 접선이 이 곡선과 다시 만나는 점의 좌표는 $(6,\ f(6))$이다. 따라서 점 $(6,\ 6)$이 곡선 위의 점이므로, $f(6)=6$이고,

$$f(x)=(x-3)^2(x-6)+k(x-6)+6$$

으로 놓을 수 있다. $f(0)=0$을 이용하여 k의 값을 구하고 계산을 마무리하면 된다.

10. [정답] ① -6

[해설]

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 할 때, 두 수열

$$\{|a_n+a_{n+1}|\},\ \{|a_n|\}$$

은 공비가 $|r|$인 등비수열이고, 두 공비가 같은 두 등비수열의 첫째항부터 제4항까지의 합이 같으므로, 두 등비수열의 첫째항은 같다. 따라서

$$|a_1+a_2|=|a_1|$$

$$\Rightarrow |a_1|\times|1+r|=|a_1|$$

$$\Rightarrow a_1=0 \text{ 또는 } r=-2 \text{ 또는 } r=0$$

이고, 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 서로 다르므로, $r=-2$이다.

따라서 수열 $\{|a_n|\}$은 공비가 2인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{4}|a_n|=a_5-3>0$$

$$=\frac{|a_1|(2^4-1)}{2-1}$$

$$=|a_5|-|a_1|$$

이다. 따라서 $a_1=3$이고, 구하는 값은 $a_2=-6$이다.

11. [정답] ② -2

[해설]

step Ⅰ : 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속임을 이용하자.

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$에서도 연속이고,

$$\lim_{x\to1} g(x) = g(1)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to1-}\left\{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{f(x)}\right\} = \lim_{x\to1+}\left\{\sqrt{f(x)}-x\right\} = \sqrt{f(1)}-1$$

$$= \lim_{x\to1-}\frac{f(x)-(x-1)}{(x-1)f(x)}$$

이다. $x\to1-$일 때 $(x-1)f(x)\to0$이고, 주어진 극한이 수렴하므로

$$f(x)-(x-1)\to0$$

$$\Rightarrow f(x)\to0$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{x-1}-1\to0$$

임을 얻는다. 함수 $f(x)$는 다항함수이므로,

$\sqrt{f(1)}-1=-1$이고,

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-(x-1)}{(x-1)f(x)} = -1$$

$$= \lim_{x\to1-}\frac{\dfrac{f(x)-(x-1)}{(x-1)^2}}{\dfrac{(x-1)f(x)}{(x-1)^2}}$$

이다. 분모와 분자가 각각 수렴하고, 분모가 0으로 수렴하지 않으므로 수렴하는 극한의 성질에 의하여

$$\lim_{x\to1-}\frac{\dfrac{f(x)-(x-1)}{(x-1)^2}}{\dfrac{(x-1)f(x)}{(x-1)^2}} = -1$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{f(x)-(x-1)}{(x-1)^2}}{\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{f(x)}{x-1}}$$

$$= \lim_{x\to1-}\frac{f(x)-(x-1)}{(x-1)^2}$$

임을 얻는다. 함수 $f(x)$는 다항함수이므로, 다항식 $f(x)$를 내림차순으로 정리하면

$$f(x) = \cdots-(x-1)^2+(x-1)$$

으로 나타내짐을 알 수 있다.

step Ⅱ : $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{g(x)}{\sqrt{x}}=k$의 값을 구하자.

주어진 극한이 수렴하므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{\sqrt{x}} = k$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{f(x)}-x\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{\sqrt{x}\{\sqrt{f(x)}+x\sqrt{x}\}}$$

이므로, 함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다.

따라서 $f(x)=(x-1)^3-(x-1)^2+(x-1)$이고, 구하는 값은

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{\sqrt{x}\{\sqrt{f(x)}+x\sqrt{x}\}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{(x-1)^3-(x-1)^2+(x-1)-x^3}{x^2}}{\dfrac{\sqrt{x}\{\sqrt{f(x)}+x\sqrt{x}\}}{x^2}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)^3-(x-1)^2+(x-1)-x^3}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}\{\sqrt{f(x)}+x\sqrt{x}\}}{x^2}}$$

$$= \frac{-4}{2} = -2$$

이다.

12. [정답] ④ $3^{\frac{3}{4}}$

[해설]

실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x) = a^x-\frac{5}{3}$$

라 하면 주어진 방정식을

$$(f(x)-x)\times(f(-x)+x)=0$$

로 나타낼 수 있다. 방정식 $f(x)-x=0$이 $x=k$를 실근으로 가지면, 방정식 $f(-x)+x=0$는 $x=-k$를 실근으로 가짐을 알 수 있다. 함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 고려했을 때 방정식 $f(x)-x=0$는 서로 다른 두 실근을 가지므로, 방정식

$$(f(x)-x)\times(f(-x)+x)=0$$

이 서로 다른 두 실근을 가지면, 방정식 $f(x)-x=0$의 서로 다른 두 실근의 절댓값이 같다. 양수 m에 대하여 이 두 실근을 각각 m, $-m$(m은 양수)이라 하면,

$$f(m)-m=0,\ f(-m)+m=0$$

$$\Rightarrow a^m-\frac{5}{3}-m=0,\ a^{-m}-\frac{5}{3}+m=0$$

$$\Rightarrow a^m+a^{-m}-\frac{10}{3}=0$$

$$\Rightarrow 3a^{2m}-10a^m+3=0$$

$$\Rightarrow a^m=3$$

$$\Rightarrow 3-\frac{5}{3}-m=0,\ m=\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow a=3^{\frac{3}{4}}$$

이므로, 구하는 값은 $3^{\frac{3}{4}}$이다.

13. [정답] ③ -12

[해설]

step Ⅰ : 방정식 $f(g(t))=2$이 오직 두 개의 실근을 가질 조건을 생각해보자.

함수 $f(x)$는 삼차함수이므로 x에 대한 방정식 $f(x)=tx$의 서로 다른 실근의 개수 $g(t)$의 값이 될 수 있는 실수는 1, 2, 3이다.

이때, 방정식 $f(g(t))=2$의 모든 실근이 0, 1이 되기 위해서는 오직 $t=0$, 1일 때에만 세 가지 경우

(i) '$g(t)=1$이고 $f(1)=2$'

(ii) '$g(t)=2$이고 $f(2)=2$'

(iii) '$g(t)=3$이고 $f(3)=2$'

중 하나를 만족시켜야 한다. 그런데,

$g(t)=1$ 또는 $g(t)=3$

을 만족시키는 실수 t가 무수히 많으므로, (i), (iii)의 경우에는 $t=0$, 1뿐 아니라 무수히 많은 실수 t가 주어진 방정식의 실근이 되므로 모순이다. 따라서

$g(0)=2,\ g(1)=2,\ f(2)=2$

가 되어야 함을 알 수 있다.

step Ⅱ : 얻은 정보에 의하여 함수 $f(x)$의 식을 작성하자.

따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 두 직선 $y=0$, $y=x$에 접한다.

함수 $f(x)$의 그래프가 원점에서 두 직선 중 어느 것에 접하는지에 따라 경우를 나누어보자.

원점에서 곡선이 직선 $y=0$에 접하는 경우,

$f(0)=0,\ f(2)=2,\ f'(0)=0,\ f'(2)=1$

이고, $f(0)=0,\ f(2)=2,\ f'(2)=1$에 의하여

$f(x)=px(x-2)^2+x$

로 놓을 수 있고, $f'(0)=4p+1=0$이므로,

$$f(x)=-\frac{1}{4}x(x-2)^2+x$$

$$\Rightarrow f(-2)=-\frac{1}{4}\times(-2)\times(-4)^2-2=6$$

이다. 한편, 원점에서 곡선이 직선 $y=x$에 접하는 경우,

$f(0)=0,\ f(2)=2,\ f'(0)=1$

이고, $f(k)=f'(k)=0$를 만족시키는 0이 아닌 실수 k가 존재한다. 따라서 $f(0)=0,\ f(2)=2,\ f'(0)=1$에 의하여

$f(x)=px^2(x-2)+x$

로 놓을 수 있고, 방정식

$px^2(x-2)+x=0$

$\Rightarrow x\{px(x-2)+1\}=0$

이 0이 아닌 중근을 가지므로 $p=1$이고,

$f(x)=x^2(x-2)+x$

$\Rightarrow f(-2)=(-2)^2\times(-4)-2=-18$

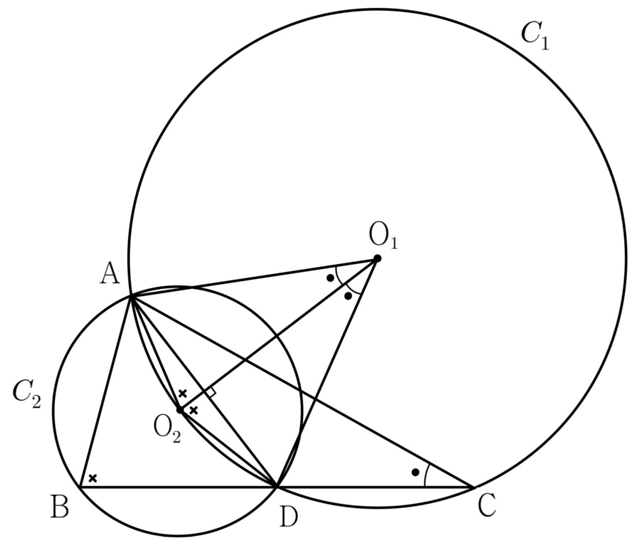
이다. 따라서 구하는 값은 $6-18=-12$이다.

14. [정답] ① $\sqrt{10}$

[해설]

step Ⅰ : 주어진 상황의 의미를 해석해보자.

원주각과 중심각의 관계에 의하여, [그림 1]과 같이 각의 크기를 표시할 수 있다.



[그림 1]

삼각형 ABC, AO_2O_1는 닮음이고 삼각형 ABC는 $\overline{AB}=\overline{CB}$인 이등변삼각형임을 알 수 있다.

따라서 삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이는

$$\overline{AO_1}=\frac{\overline{AD}}{2\sin B}=\frac{5}{2\times\dfrac{\sqrt{15}}{8}}=\frac{4\sqrt{15}}{3}$$

임을 얻는다. 한편, 삼각형 ABC는 $\overline{AB}=\overline{CB}$인 이등변삼각형이고 점 D가 선분 BC의 중점이므로, $\overline{BD}=x$, $\overline{AB}=2x$라 놓을 수 있다. 이때 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$(2x)^2+x^2-2\times\frac{7}{8}\times(2x)\times x=5^2$$

$$=\frac{3}{2}x^2$$

$$\Rightarrow x=\frac{5\sqrt{6}}{3}$$

이다. 따라서 구하는 값은 $\sqrt{\left(\dfrac{4\sqrt{15}}{3}\right)^2-\left(\dfrac{5\sqrt{6}}{3}\right)^2}=\sqrt{10}$이다.

15. [정답] ⑤ $9+2\sqrt{2}$

[해설]

step Ⅰ : 함수 $F(x)=\int_0^x |f(t)|dt$의 그래프를 그려보자.

함수 $f(x)$에 대하여

$$|f(x)| = ||x-a|-2|$$

이므로, 함수 $F(x)$를

$$F(x)=\int_0^x |f(t)|dt$$

라 하면, 함수 $F(x)$의 그래프는 구간 $(0, a-2)$, $(a-2, a)$,$(a, a+2)$, $(a+2, \infty)$에서 각각 최고차항의 계수가 $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$인 이차함수의 그래프의 일부이다. 즉,

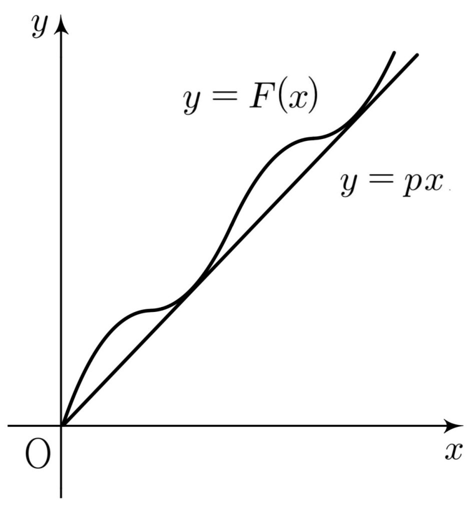
$(0, a-2)$에서 $F(x)=-\frac{1}{2}(x-a+2)^2+\frac{1}{2}(-a+2)^2$,

$(a-2, a)$에서 $F(x)=\frac{1}{2}(x-a+2)^2+\frac{1}{2}(-a+2)^2$,

$(a, a+2)$에서 $F(x)=-\frac{1}{2}(x-a-2)^2+\frac{1}{2}(-a+2)^2+4$

$(a+2, \infty)$에서 $F(x)=\frac{1}{2}(x-a-2)^2+\frac{1}{2}(-a+2)^2+4$

이다. 따라서 함수 $y=F(x)$의 그래프는 [그림 1]과 같다.



[그림 1]

step Ⅱ : 주어진 부등식의 의미를 해석하자.

부등식 $\int_0^x |f(t)|dt \le px$가 성립하도록 하는 양수 x의 값이 α_1, α_2뿐이므로, 곡선 $y=F(x)$ 위의 두 점 $(\alpha_1, F(\alpha_1))$, $(\alpha_2, F(\alpha_2))$에서의 접선이 $y=px$로 일치한다. 이때, 이 직선의 기울기 p는 두 점 $(a-2, F(a-2))$, $(a+2, F(a+2))$을 지나는 직선의 기울기와 일치하고,

$$F(a+2)-F(a-2)=4$$

$$\Rightarrow p=1$$

임을 알 수 있다. 따라서 α_1, α_2는 일반성을 잃지 않고 $\alpha_1<\alpha_2$라 하면 방정식

$$|f(x)|=1$$

을 만족시키는 양수 x의 값 중에서 각각 구간 $(a-2, a)$, $(a+2, \infty)$에 포함되는 값이므로

$$|f(x)|=1$$

$$= ||x-a|-2|$$

$$\Rightarrow \alpha_1=a-1,\ \alpha_2=a+3$$

임을 얻는다. 즉, $x=a-1$은 방정식 $F(x)=x$의 한 실근이므로,

$$F(a-1)=a-1$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(-a+2)^2$$

$$\Rightarrow (a-2)^2-2(a-2)-1=0$$

$$\Rightarrow a-2=1+\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \alpha_1=a-1=2+\sqrt{2},\ \alpha_2=a-3=6+\sqrt{2}$$

임을 얻는다. 따라서 구하는 값은 $p+\alpha_1+\alpha_2=9+2\sqrt{2}$이다.

16. [정답] 5

[해설]

로그의 진수 조건을 먼저 고려하면 $x>-1$를 얻는다.

밑을 같게 맞추어 로그방정식을 풀어보자.

$$\log_2(x-1)=\frac{1}{2}+\log_4(x+3)$$

$$\Rightarrow \log_4(x-1)^2=\log_4(2x+6)$$

$$\Rightarrow (x-1)^2=2x+6$$

$$\Rightarrow x^2-4x-5=0$$

$$=(x+1)(x-5)$$

이고 $x>-1$이므로 구하는 값은 5이다.

17. [정답] 4

[해설]

함수 $f(x)=x^3-6x^2+10x$를 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=3x^2-12x+10$$

이다. 따라서

$$\frac{f(a)-f(1)}{a-1}=f'(3)$$

$$\Rightarrow \frac{a^3-6a^2+10a-5}{a-1}=3\times3^2-12\times3+10$$

$$\Rightarrow a^2-5a+5=1$$

$$\Rightarrow a=4$$

이므로 구하는 값은 4이다.

18. [정답] 16

[해설]

주어진 관계식에 $n=1$, 2, $\cdots$ 을 차례대로 대입하여 나열하면

$a_1=10$, $a_2=6$, $a_3=2$, $a_4=-2$, $a_5=1$, $a_6=-3$,

$a_7=0$, $a_8=3$, $a_9=-1$, $a_{10}=2$

이므로 구하는 값은

$\sum_{n=1}^{9} a_n = 10+6+2+(-2)+1+(-3)+0+3+(-1)=16$이다.

19. [정답] 17

[해설]

주어진 항등식

$f(x+1)=f(x)+2x$

$\Rightarrow f(x+1)-f(x)=2x$

의 양변을 적분하면,

$$\int_x^{x+1} f(t)\,dt = x^2+C$$

를 얻고, $\int_0^1 f(x)dx=1$에 의하여 $C=1$이다.

따라서 구하는 값은

$$\int_1^4 f(t)\,dt$$

$$=\int_1^2 f(t)\,dt+\int_2^3 f(t)\,dt+\int_3^4 f(t)\,dt$$

$$=(1^2+1)+(2^2+1)+(3^2+1)$$

$$=2+5+10=17$$

이다.

20. [정답] 13

[해설]

step Ⅰ : 수열 $\{a_n+a_{n+1}\}$이 등차수열이 될 조건을 이용하자.

등차수열 $\{a_n+a_{n+1}\}$의 공차를 d라 하면 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$(a_{n+1}+a_{n+2})-(a_n+a_{n+1})=d$

$=a_{n+2}-a_n$

를 만족시킨다. 따라서 두 수열 $\{a_{2n}\}$, $\{a_{2n-1}\}$이 각각 공차가 d인 등차수열을 이룸을 알 수 있고, $a_1=1$이므로

$a_3=1+d$, $a_5=1+2d$, $a_7=1+3d$

이다.

step Ⅱ : 집합 A가 주어진 조건을 만족시킴을 이용하자.

두 수열 $\{a_{2n}\}$, $\{a_{2n-1}\}$이 공차가 같은 등차수열임을 고려하면 $n(A)=5$일 때,

$a_1=a_4$ 또는 $a_2=a_3$

임을 알 수 있다. $a_2=a_3$이면 주어진 조건 $a_2<a_3$에 모순이므로 $a_1=a_4$인 경우만이 가능하고, 집합 A의 원소를 모두 나열하면

$a_2=1-d$,

$a_1=a_4=1$,

$a_3=a_6=1+d$,

$a_5=a_8=1+2d$,

$a_7=1+3d$

이며, 이 수들은 첫째항이 $1-d$이고 공차가 d인 등차수열을 이룬다. 집합 A의 모든 원소의 합이 20이므로

$5(1+d)=20$

$\Rightarrow d=3$

이고, 구하는 값은 $a_9=1+4d=13$이다.

21. [정답] 75

[해설]

step Ⅰ : 주어진 상황의 의미를 해석해보자.

점 P의 시각 t에서의 위치를 $x(t)$라 하면, 함수 $x(t)$는 함수 $v(t)$의 한 부정적분이다. $x(t)$는 $v(t)$의 부호가 바뀌는 실수 t, 즉 $t=1$, $t=5$, $t=\frac{5p}{q}+6$에서만 극값을 갖는다.

함수 $x(t)$의 두 극솟값이 서로 다른 두 극솟값 m_1, $m_2(m_1<m_2)$를 갖는다고 하면, $m_1<k<m_2$인 모든 실수 k에 대하여 방정식 $x(t)=k$는 서로 다른 두 양의 실근을 갖는다. 따라서 점 B의 좌표를 $\mathrm{B}(b)$라 할 때, $x(t)=k$를 만족시키는 양수 t의 개수가 2인 실수 k가 0과 b뿐이면, $x(t)$는 $t=1$과 $t=\frac{5p}{q}+6$에서 동일한 극솟값 0을, $t=5$에서 7 이상인 극댓값 b를 가져야 한다. 따라서

$$\int_0^1 v(t)\,dt=-7,\ \int_1^5 v(t)\,dt=b,\ \int_5^{\frac{5p}{q}+6} v(t)\,dt=-b$$

가 됨을 알 수 있다.

step Ⅱ : 계산을 통해 답을 구하자.

먼저 $\int_0^1 v(t)\,dt=-7$에서 p의 값을 구하면

$$\int_0^1 v(t)\,dt=-7$$
$$=\int_0^1 -p(t-1)(t-5)dt$$
$$=-p\int_0^1 (t^2-6t+5)dt$$
$$=-p\left[\frac{1}{3}t^3-3t^2+5t\right]_0^1$$
$$=-\frac{7}{3}p$$
$$\Rightarrow p=3$$

이다. 한편,

$$\int_1^5 -3(t-1)(t-5)\,dt=b$$
$$=\left[-(t-1)^2(t-7)\right]_1^5=32$$

이다. 따라서

$$\int_5^{\frac{5p}{q}+6} v(t)\,dt=-32$$
$$=\int_5^6 v(t)\,dt+\int_6^{\frac{5p}{q}+6} v(t)\,dt$$
$$=-7-\frac{1}{2}\times15\times\frac{15}{q}$$
$$\Rightarrow q=\frac{9}{2}$$

이다. 따라서 구하는 값은 $10\times(p+q)=75$이다.

22. [정답] 28

[해설]

step Ⅰ : 주어진 조건의 의미를 파악하자.

두 실수 x_1, x_2가 열린구간 $(3, 5)$에 존재하면 실수 x_1-1는 열린구간 $(2, 4)$에 존재하고 x_1+1은 열린구간 $(4, 6)$에 존재한다.

자연수 n에 대하여 두 집합 A_n, B_n을

$$A_n=\{f(x)|2<x<4\},\ B_n=\{f(x)|4<x<6\}$$

라 하자. 자연수 n에 대하여

$$f(x_1+1)=f(x_2-1)$$

을 만족시키는 두 실수 x_1, x_2가 열린구간 $(3, 5)$에 존재할 조건은

$$A_n\cap B_n\neq\varnothing$$

이다.

step Ⅱ : 충분히 큰 자연수 n에 대하여 생각해보고, 특수한 경계를 기준으로 경우를 나누어보자.

$n=1$일 때에만 두 집합이 함수 $f(x)$의 치역

$$\{y|-1\le y\le1\}$$

과 같으므로 주어진 조건을 만족시킨다.

$n\ge2$일 때에는 두 집합 중 어느 것도

$$\{y|-1\le y\le1\}$$

이 아니므로, $A_n\cap B_n\neq\varnothing$일 필요충분조건은

'$f(2)<f(4)$이고 $f(6)<f(4)$'

또는 '$f(2)>f(4)$이고 $f(6)>f(4)$'

이다. $n=2$일 때는

$$f(2)=f(4)=f(6)$$

이므로 주어진 조건을 만족시키지 않고, $n=3$일 때는

'$f(2)>f(4)$이고 $f(6)>f(4)$'

이므로 주어진 조건을 만족시킨다. $n=4$, 5일 때는

$$f(2)>f(4)>f(6)$$

이므로 주어진 조건을 만족시키지 않고, $n=6$일 때는

$$f(2)=f(4)<f(6)$$

이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

$n=7$, 8, 9일 때,

'$f(2)<f(4)$이고 $f(6)<f(4)$'

이므로 주어진 조건을 만족시키고, $n=10$일 때는

$$f(2)<f(4)=f(6)$$

이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

$n>10$인 모든 자연수 n에 대하여

$$f(2)<f(4)<f(6)$$

이므로, 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 구하는 값은 $1+3+7+8+9=28$이다.

제 2 교시

수학 영역 해설 (선택)

확률과 통계

23	③	24	②	25	②	26	①	27	②
28	②	29	67	30	42				

〈코멘트〉
상당히 까다롭지 않았나 생각합니다. 이러한 난이도로 확률과 통계가 출제되면 낮은 1등급컷이 형성될 수 있을 것 같습니다.
27번 : 주어진 명제의 대우를 생각하여 경우를 나누어 해결하는 문항이었습니다.
28번 : 통계적 추정의 원리를 알고, 표본평균의 평균과 분산의 의미를 해석하는 것이 핵심이었습니다.
29번 : 철저히 종속적으로 구성된 사건들의 연쇄를 확률의 곱셈정리의 활용으로 해결하는 문항이었습니다.
30번 : 경우의 수의 대칭성과 나누어 주는 상황에서 개수가 제한되는 것을 여사건으로 해결해 주는 아이디어가 중요했습니다.

23. [정답] ③ 30

[해설]
구하는 경우의 수는 $\dfrac{5!}{2!\times 2!}=30$이다.

24. [정답] ② $\dfrac{2}{5}$

[해설]
$\mathrm{P}(A\cup B)=\dfrac{3}{5}$이므로 $\mathrm{P}(A^c\cap B^c)=1-\dfrac{3}{5}=\dfrac{2}{5}$이고,

$$\mathrm{P}(B^c)=\mathrm{P}(A\cap B^c)+\mathrm{P}(A^c\cap B^c)=\dfrac{3}{5}$$

$$\Rightarrow\ \mathrm{P}(B)=1-\dfrac{3}{5}=\dfrac{2}{5}$$

이다.

25. [정답] ② $\dfrac{5}{12}$

[해설]
주사위를 던져 나온 두 눈의 순서쌍에 대하여
나온 두 눈의 수의 곱이 6의 배수가 되는 경우를 ○,
나온 두 눈의 수의 곱이 6의 배수가 아닌 경우를 ×로
나타내면 [표 1]과 같다.

	1	2	3	4	5	6
1	×	×	×	×	×	○
2	×	×	○	×	×	○
3	×	○	×	○	×	○
4	×	×	○	×	×	○
5	×	×	×	×	×	○
6	○	○	○	○	○	○

[표 1]

표본공간의 경우의 수는 36이고 각 근원사건의 확률은 일치하며, 이 중 조건을 만족시키는 경우의 수는 15이다. 따라서 구하는 값은 $\dfrac{15}{36}=\dfrac{5}{12}$이다.

2

26. [정답] ① 0.256

[해설]

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(1,\, t^2)$를 따르므로, 정규분포의 표준화에 의하여

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathrm{P}(t \le X \le 2t) \\ &= \mathrm{P}\left(\frac{t-1}{t} \le Z \le \frac{2t-1}{t}\right) \\ &= \mathrm{P}\left(1-\frac{1}{t} \le Z \le 2-\frac{1}{t}\right) \end{aligned}$$

이다. 정규분포를 따르는 확률변수의 확률밀도함수의 그래프의 대칭성에 의하여 함수 $f(t)$는

$$1-\frac{1}{t}+2-\frac{1}{t}=0$$

$$\Rightarrow\ t=\frac{2}{3}$$

일 때 최대이다.

$$f\left(\frac{2}{3}\right)=\mathrm{P}\left(-\frac{1}{2} \le Z \le \frac{1}{2}\right)=2\times\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{1}{2}\right)$$

이므로,

$$a=\frac{2}{3},\ \ M=2\times 0.192$$

이고, 구하는 값은 $a\times M=0.256$이다.

27. [정답] ② 824

[해설]

주어진 명제

'$f(a)\times f(b)$가 홀수이면 $a\times b$는 홀수이다.'

는 이 명제의 대우인

'$a\times b$가 홀수가 아니면 $f(a)\times f(b)$가 홀수가 아니다.'

와 동치이다. 즉, $a\times b$가 짝수인 모든 경우에 $f(a)\times f(b)$가 짝수여야 하므로,

(i) $f(2)$와 $f(4)$가 모두 짝수인 경우

(ii) $f(2)$만 홀수이고 $f(1)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$가 모두 짝수인 경우

(iii) $f(4)$만 홀수이고 $f(1)$, $f(3)$, $f(2)$, $f(5)$가 모두 짝수인 경우

에만 주어진 조건을 만족시킨다.

(i)의 경우의 수는 $2^2\times5^3$이고, (ii)와 (iii)의 경우의 수는 2×3^4로 같으므로, 구하는 경우의 수는 $2^2\times5^3+2\times3^4+2\times3^4=824$이다.

28. [정답] ② $\dfrac{2}{625}$

[해설]

step I : 확률변수 $\overline{X}$ 를 통하여 X를 추정해보자.

이 반의 학생 중 임의로 한 학생을 선택해 등급을 확인할 때, 확인한 수를 확률변수 X라 하면, 이 모집단에서 크기가 5인 표본을 임의추출해서 얻은 표본평균 $\overline{X}$ 에 대하여

$$\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X),\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{5}$$

이므로, $\mathrm{E}(X)=4$, $\mathrm{V}(X)=5$이다.

step II : 평균과 분산의 정의를 활용하여 계산하자.

따라서 등급이 1, 3, 5, 7인

학생의 수를 각각 a, b, c, d라 하면, $a+b+c+d=10$이고,

$\mathrm{E}(X)=4$에 의하여 $a+3b+5c+7d=40$이며,

$\mathrm{V}(X)=5$에 의하여 $9a+b+c+9d=50$이다.

$a+b+c+d=10$와 $9a+b+c+9d=50$를 변끼리 빼면

$$8a+8d=40$$

$$\Rightarrow a+d=5$$

를 얻고, $4\times(a+b+c+d)=40$과 $a+3b+5c+7d=40$를 변끼리 빼면

$$3a+b-c-3d=0$$

$$\Rightarrow 3(a-d)=c-b$$

를 얻는다. 이때, $t=a-d$라 하면

$$a=\frac{5+t}{2},\ b=\frac{5-3t}{2},\ c=\frac{5+3t}{2},\ d=\frac{5-t}{2}$$

이다. a, b, c, d는 음이 아닌 정수이므로, t는 1이다.

따라서 $a=3$, $b=1$, $c=4$, $d=2$이고, 구하는 값은

$\mathrm{P}\left(\overline{X}=\dfrac{33}{5}\right)=\dfrac{5!}{4!}\times\left(\dfrac{2}{10}\right)^4\times\left(\dfrac{4}{10}\right)=\dfrac{2}{625}$이다.

29. [정답] 67

[해설]

step Ⅰ : 익숙한 상황으로 바꿔보자.

n번째 시행을 한 직후의 k의 값을 k_n이라 하면, 3번째 시행까지 $k_3 \neq 0$인 경우만을 표로 나타내면 [표 1]과 같다.

<table>
<tr><td>n</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td rowspan="5">k_n</td><td rowspan="5">3</td><td rowspan="3">2</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3</td><td>2</td></tr>
<tr><td>4</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4</td><td rowspan="2">3</td><td>2</td></tr>
<tr><td>4</td></tr>
</table>

[표 1]

이때, $k_3 \neq 0$이면, $k_4 \neq 0$이므로, $k_3 \neq 0$일 확률을 구하여 1에서 빼자.

step Ⅱ : 각 사건이 일어나는 확률을 구하고, 곱셈정리를 쓰자.

$k_n = 1$일 때, $k_{n+1} = 2$일 확률은 $\dfrac{{}_4\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_1} = \dfrac{4}{5}$이다.

$k_n = 2$일 때, $k_{n+1} = 1$일 확률은 $\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_1} = \dfrac{2}{5}$이고,

$k_{n+1} = 3$일 확률은 $\dfrac{{}_3\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_1} = \dfrac{3}{5}$이다

$k_n = 3$일 때, $k_{n+1} = 2$일 확률은 $\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2 \times {}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2} = \dfrac{3}{5}$이고,

$k_{n+1} = 4$일 확률은 $\dfrac{{}_3\mathrm{C}_1 \times {}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2} = \dfrac{3}{10}$이다.

$k_n = 4$일 때, $k_{n+1} = 3$일 확률은 $\dfrac{{}_4\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_1} = \dfrac{4}{5}$이다.

따라서 구하는 확률은

$$1 - \frac{3}{5} \times \left\{ \frac{2}{5} \times \frac{4}{5} + \frac{3}{5} \times \left(\frac{3}{5} + \frac{3}{10} \right) \right\} - \frac{3}{10} \times \frac{4}{5} \times \left(\frac{3}{5} + \frac{3}{10} \right)$$

$$= \frac{67}{250}$$

이고, 구하는 값은 67이다.

30. [정답] 42

[해설]

step Ⅰ : 익숙한 상황으로 바꿔보자.

상자 A에 들어가는 흰 공의 개수를 a, 상자 B에 들어가는 흰 공의 개수를 b, 상자 A에 들어가는 검은 공의 개수를 c, 상자 B에 들어가는 검은 공의 개수를 d라 하자. 이때 주어진 조건을 만족시키는 경우의 수는 음이 아닌 정수 a, b, c, d에 대하여

$$a+b+c+d = 7,\ a+b \leq 6,\ a > d,\ c+d \leq 5$$

를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수와 같음을 알 수 있다.

step Ⅱ : 공의 개수 제한을 생각하지 않고 전체 경우의 수를 구한 다음, 여사건을 제외하는 방법을 사용하자.

음이 아닌 정수 a, b, c, d에 대하여

$$a+b+c+d = 7,\ a > d$$

를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$$\frac{{}_4\mathrm{H}_7 - \left({}_2\mathrm{H}_1 + {}_2\mathrm{H}_3 + {}_2\mathrm{H}_5 + {}_2\mathrm{H}_7\right)}{2} = 50$$

이고,

$$a+b+c+d = 7,\ a > d,\ a+b = 7$$

인 경우의 수는 ${}_2\mathrm{H}_7 - 1 = 7$이며,

$$a+b+c+d = 7,\ a > d,\ c+d \geq 6$$

인 경우는 $(1, 0, 6, 0)$뿐이므로 구하는 값은 $50 - 7 - 1 = 42$이다.

미적분

23	④	24	②	25	④	26	③	27	③
28	②	29	4	30	180				

〈코멘트〉

30번을 제외하고는 무난했습니다.

27번 : '잘게 쪼게어 더한다'는 정적분의 정의를 이해하면 역함수의 정적분 또는 '교대급수와 정적분'으로 해석할 수 있었습니다.

28번 : 적분 기호 안의 식을 f에 대하여 나타내고 치환적분법을 사용하여 해결할 수 있었습니다.

29번 : 평범한 등비급수 계산 문항입니다.

30번 : 접선의 개수와 변곡점에서의 접선의 관계를 재밌는 포장으로 물었습니다.

23. [정답] ④ 2π

[해설]

$u=\sqrt{x}$ 로 치환하면 $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2u}$ 이므로, 구하는 값은

$$\int_0^{\pi^2}\sin\sqrt{x}\,dx$$
$$=\int_0^{\pi}2u\sin u\,du$$
$$=2\int_0^{\pi}\left(u-\frac{\pi}{2}\right)\sin u\,du+2\int_0^{\pi}\frac{\pi}{2}\sin u\,du=2\pi$$

이다.

24. [정답] ② 1

[해설]

$g(\pi)=\dfrac{f(\pi)}{2}$ 이므로 $f(\pi)=2$이고, 함수 $g(x)$를 x에 대하여 미분하면 몫의 미분법에 의하여

$$g'(x)=\frac{f'(x)(2+\sin x)-f(x)\cos x}{(2+\sin x)^2}$$

이므로,

$$g'(\pi)=\frac{2f'(\pi)+f(\pi)}{4}$$

이다. 따라서 구하는 값은 $f'(\pi)=1$이다.

25. [정답] ④ $\dfrac{8}{3}$

[해설]

등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 극한

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n\times a_n}{2^{n+1}+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n\times a_n}{2+\frac{4}{2^n}}$$

이 수렴하므로, 수열 $\{a_n\}$의 공비는 $\dfrac{2}{3}$이고, 일반항을

$$a_n=a_1\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

로 놓을 수 있다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n\times a_n}{2^{n+1}+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{2}\times a_1}{2+\frac{4}{2^n}}=\frac{3}{4}a_1$$

이므로, $a_1=4$이고 구하는 값은 $a_2=\dfrac{8}{3}$이다.

26. [정답] ③ $\dfrac{1}{4}$

[해설]

$4=f(t)$를 만족시키는 실수 t의 값은 2이고,

$f^{-1}(2)=1$이므로, 함수 $g(x)$의 그래프 위의 점 $(4,1)$에 대응되는 점에서의 접선의 기울기는

$$g'(2)=\frac{\frac{1}{f'(f^{-1}(2))}}{f'(2)}=\frac{1}{f'(1)f'(2)}=\frac{1}{4}$$

이다. 따라서 구하는 값은 $1\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$ 이다.

27. [정답] ③ $\frac{5}{2}\pi-1$

[해설]

함수 $\sin x$가 구간 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$에서 증가하고 $\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi\right)$에서 감소한다. 따라서 $a_m<a_{m+1}$을 만족시키는 가장 큰 자연수를 m이라 하면 $\lim_{n\to\infty}a_m=\frac{\pi}{2}$ 이고,

$$\begin{aligned}b_n&=\sum_{k=1}^{n}a_k\left|\sin a_{k+1}-\sin a_k\right|\\&=\sum_{k=1}^{m}a_k(\sin a_{k+1}-\sin a_k)-\sum_{k=m+1}^{n}a_k(\sin a_{k+1}-\sin a_k)\\&=\sum_{k=1}^{m}(a_{k+1}\sin a_{k+1}-a_k\sin a_k)\\&\quad-\sum_{k=1}^{m}(a_{k+1}-a_k)\sin a_{k+1}\\&\quad-\sum_{k=m+1}^{n}(a_{k+1}\sin a_{k+1}-a_k\sin a_k)\\&\quad+\sum_{k=m+1}^{n}(a_{k+1}-a_k)\sin a_{k+1}\end{aligned}$$

이다. 정적분의 정의에 의하여 구하는 값은

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}b_n\\&=\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx\\&\quad-\left(\frac{3\pi}{2}\sin\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\sin x\,dx\right)\\&=\frac{5}{2}\pi-1\end{aligned}$$

이다.

28. [정답] ② $\frac{3e^4-e^2}{4}$

[해설]

step Ⅰ : 먼저 주어진 함수 $f(t)$가 결정되는 조건을 해석해보자.

원점과 점 P 사이의 거리가 최소일 때, 원점을 중심으로 하고 점 P를 지나는 원이 곡선 $y=\frac{t}{e^x}$에 접하므로, 직선 OP의 기울기와 곡선 $y=\frac{t}{e^x}$ 위의 점 P에서의 접선의 기울기의 곱이 -1이다. 함수 $y=\frac{t}{e^x}$를 x에 대하여 미분하면

$$y'=-\frac{t}{e^x}$$

이므로, $u=f(t)$라 하면

$$\frac{te^{-u}}{u}\times(-te^{-u})=-1$$

$$\Rightarrow\ t^2=ue^{2u}$$

를 얻는다.

step Ⅱ : 치환적분법과 부분적분법을 적용해 계산하자.

$u=f(t)$로 치환하면 $\frac{du}{dt}=f'(t)$이므로

$$\int_a^b t^2f'(t)dt=\int_1^2 ue^{2u}du$$

이다. 따라서 구하는 값은

$$\begin{aligned}&\int_1^2 ue^{2u}du\\&=\left[\frac{u}{2}e^{2u}\right]_1^2-\int_1^2 e^{2u}du\\&=\left[\frac{u}{2}e^{2u}\right]_1^2-\left[\frac{1}{4}e^{2u}\right]_1^2\\&=\left[\frac{2u-1}{4}e^{2u}\right]_1^2=\frac{3e^4-e^2}{4}\end{aligned}$$

이다

29. [정답] 4

[해설]

step Ⅰ : 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} f(a_n)$과 $\sum_{n=1}^{\infty} \{a_1 + f(a_n)\}$이 각각 수렴할 조건을 생각해보자.

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} f(a_n)$가 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = 0$이므로,
수열 $\{a_n\}$은 0으로 수렴하고, $f(0) = 0$이다.

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \{a_1 + f(a_n)\}$가 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} \{a_1 + f'(a_n)\} = 0$이므로
$f'(0) = -a_1$이다.

따라서, 수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 할 때, $-1 < r < 1$이다.

step Ⅱ : 등비급수의 합 공식을 활용하여 계산하자.

주어진 조건에 의하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{a_1 + f'(a_n)\} = 6$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} 2a_n$$
$$= 2 \times \frac{a_1}{1-r}$$
$$\Rightarrow \frac{a_1}{1-r} = 3$$

임을 알 수 있다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(a_n) = 6$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left({a_n}^2 - a_1 a_n\right)$$
$$= \frac{{a_1}^2}{1-r^2} - \frac{{a_1}^2}{1-r}$$
$$= 3(1-r)\left(\frac{1}{1+r} - 1\right)$$
$$\Rightarrow 3(1-r)(-r) = 2(1+r)$$
$$\Rightarrow 3r^2 - 5r - 2 = 0$$
$$= (3r+1)(r-2)$$
$$\Rightarrow r = -\frac{1}{3},\ a_1 = 4$$
$$\Rightarrow f(x) = x^2 - 4x$$

따라서 $a_2 = -\frac{4}{3}$, $f(3) = -3$이므로 구하는 값은 4이다.

30. [정답] 180

[해설]

step Ⅰ : 점 (t, t)에서 곡선 $y = g(x)$에 그은 접선의 접점의 개수가 일정할 조건을 생각해보자.

점 (t, t)에서 곡선 $y = g(x)$에 그은 접선의 접점의 개수는 x에 대한 방정식

$$g(x) = g'(x)(x-t) + t$$

의 서로 다른 실근의 개수와 같다. 이 식을 x에 대하여 미분하면

$$g'(x) = g''(x)(x-t) + g'(x)\left(1 - \frac{dt}{dx}\right) + \frac{dt}{dx}$$
$$\Rightarrow (g'(x) - 1)\frac{dt}{dx} = g''(x)(x-t)$$

$\frac{dt}{dx} = 0$일 때만 방정식 $g(x) = g'(x)(x-t) + t$의 서로 다른 실근의 개수가 바뀔 수 있으므로, $x = t$ 또는 $g''(x) = 0$일 때,
즉, 점 (t, t)가 곡선 $y = g(x)$ 위의 점이거나 곡선 $y = g(x)$의 변곡점에서의 접선일 때만 접선의 개수가 바뀔 수 있다.

step Ⅱ : 주어진대로 대칭성을 활용하여 계산해보자

함수 $g(x)$를 x에 대하여 미분하면,

$$g'(x) = f'(x)e^{f(x)} - f''(x)$$
$$\Rightarrow g''(x) = f''(x)e^{f(x)} + \{f'(x)\}^2 e^{f(x)}$$

이다. 주어진 조건을 만족시키기 위해서는 곡선 $y = g(x)$가 직선 $y = x$와 만나지 않고, 직선 $y = x$가 곡선 $y = g(x)$의 두 변곡점에서의 접선의 교점을 지나야 한다.

따라서 $f''(x) = -1$이고, 곡선 $y = g(x)$의 두 변곡점의 x좌표를 각각 a, $b\,(a < b)$라 할 때, $f'(a) = 1$, $f'(b) = -1$이다. 따라서

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x-1)(x-3) + C$$

이고, $2 = 2 - a + g(a)$이므로, $C = 0$이다. 구하는 값은
$80 \times \{f(-1)\}^2 = 180$이다.

기하

23	⑤	24	④	25	②	26	①	27	②
28	③	29	24	30	43				

〈코멘트〉

27부터 30번까지 난이도 차이가 크게 나지 않는 구성이었습니다. 아주 어렵지는 않지만 그래도 절대 쉽지만은 않았습니다.

27번 : 포물선의 정의를 위한 보조선을 긋고, 두 방향에서 공간도형의 상황을 단면화하여야 풀 수 있었습니다.

28번 : 실수 t에 대하여 나타낸 직선의 벡터방정식을 확인할 수 있었습니다. 실수배 구성을 통한 한 직선에 존재함을 통해 t의 범위를 잡아 해결하면 좋습니다.

29번 : 구성이 잘 짜여진 타원의 정의 문제입니다.

30번 : 흔한 상황이지만, 원과 구가 한 점에서만 만나는 기하적 상황이 재미있습니다.

23. [정답] ⑤ $\frac{4}{5}$

[해설]

두 직선의 방향벡터는 각각 $\vec{a}=(2,1)$, $\vec{b}=(3,4)$이므로

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$$=\frac{2\times3+3\times4}{\sqrt{2^2+1^2}\times\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

이고, 구하는 값은 $\frac{4}{5}$이다.

24. [정답] ④ 4

[해설]

구하는 값은 $\sqrt{7+9}=4$이다.

25. [정답] ② 8

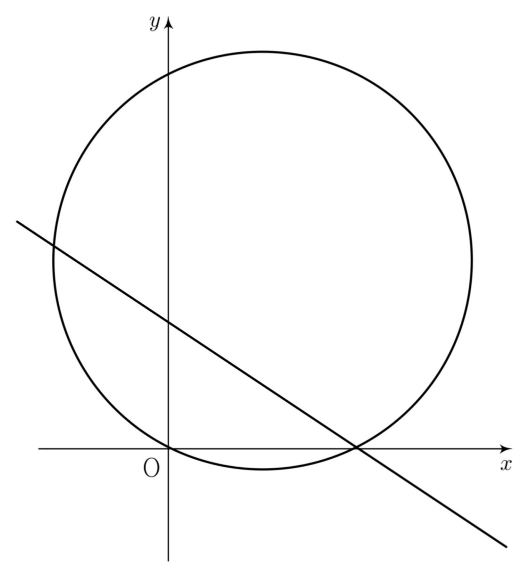
[해설]

주어진 점들의 좌표는 각각 $\mathrm{B}(-3,\,-4,\,5)$, $\mathrm{C}(3,\,-4,\,5)$이므로 구하는 값은 8이다.

26. [정답] ① $\frac{10}{3}\pi+\frac{5}{4}\sqrt{3}$

[해설]

좌표평면에서 $\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\le|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2$를 만족시키는 점 P가 나타내는 영역은 원점과 점 $(2,4)$를 이은 선분을 지름으로 하는 원의 둘레 또는 내부이고, $5\le\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$를 만족시키는 점 P가 나타내는 영역은 점 $\left(\frac{1}{2},1\right)$을 지나고 기울기가 $-\frac{1}{2}$인 직선에 의하여 나뉘어진 두 영역 중 점 $(2,4)$가 있는 영역이므로, 이 두 조건을 모두 만족시키는 점 P가 나타내는 영역은 [그림 1]에서 원과 직선으로 둘러싸인 두 영역 중 더 넓은 영역이다.



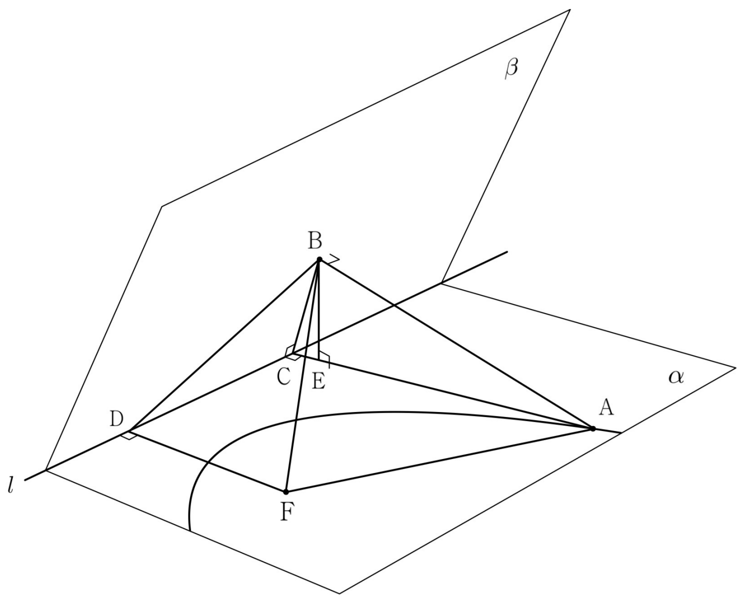
[그림 1]

따라서 그 넓이는 $\frac{10}{3}\pi+\frac{5}{4}\sqrt{3}$이다.

27. [정답] ② $3\sqrt{3}$

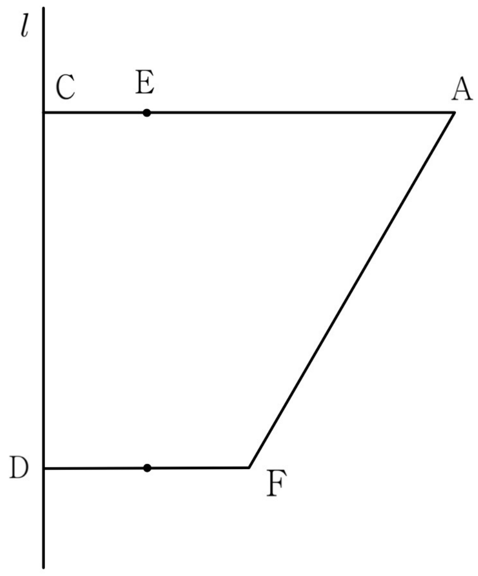
[해설]

점 A와 점 F에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하고 점 B에서 평면 α에 내린 수선의 발을 E라 하자. 이를 그림으로 나타내면 [그림 1]과 같다.



[그림 1]

주어진 상황을 평면 α에 수직인 방향에서 바라본 것을 나타내면 [그림 2]와 같다.



[그림 2]

$\overline{\mathrm{AC}}=a$라 하면, 포물선의 정의에 의하여

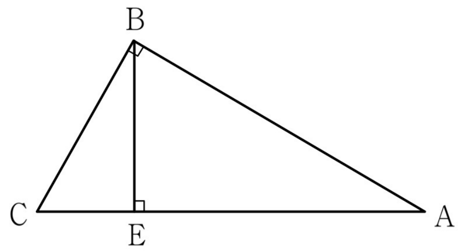
$$\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{AF}}=a$$

이고, $\overline{\mathrm{CD}}=b$라 하면, 피타고라스 정리에 의하여

$$a^2-(a-2)^2=b^2$$
$$=4a-4$$

를 얻는다.

주어진 상황을 평면 ABC에 수직인 방향에서 바라본 것을 나타내면 [그림 3]과 같다.



[그림 3]

$\overline{\mathrm{BC}}=c$라 하면 $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{3}$이므로

피타고라스 정리에 의하여

$$c^2+(2\sqrt{3})^2=a^2$$

를 얻고, $\sin(\angle\mathrm{ACB})=\dfrac{2\sqrt{3}}{a}$이고 $\overline{\mathrm{BF}}=2\sqrt{5}$이므로,

피타고라스 정리에 의하여

$$\left(\frac{2\sqrt{3}}{a}\times c\right)^2+b^2+1=(2\sqrt{5})^2$$

을 얻는다. 이를 연립하면

$$\frac{12c^2}{c^2+12}+c^2+13=20$$

$$\Rightarrow c^4+17c^2-84=0$$

$$\Rightarrow c^2=4$$

를 얻는다. 따라서 $a=4$, $b=2\sqrt{3}$, $c=2$이므로 구하는 값은

$\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times3=3\sqrt{3}$이다.

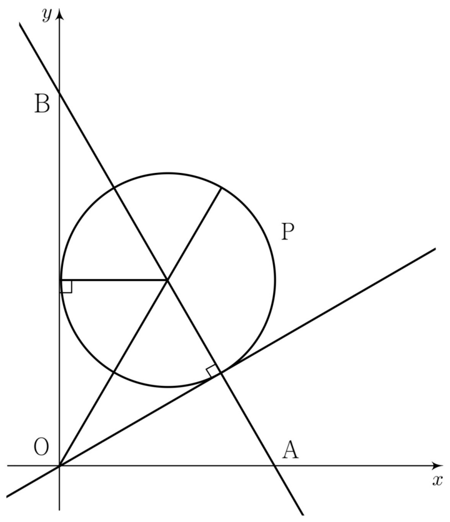
28. [정답] ③ $\dfrac{4}{3}$

[해설]

step I : 주어진 상황을 관찰할 때, 필요한 점들을 확인하자.

주어진 조건 $\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}\right|=2$에서 점 P가 나타내는 도형은 선분 AB의 중점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원이다. $\overrightarrow{\mathrm{OX}}=t\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$를 만족시키는 점 X는 직선 AB 위의 점이고, $s\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OX}}$인 실수 s가 존재한다. $t=0$일 때, 점 X의 위치는 점 B이고, $t=\dfrac{3}{4}$일 때, 점 X의 위치는 선분 AB를 $1:3$으로 내분하는 점이다. 실수 t의 최댓값이 $\dfrac{3}{4}$이고 최솟값이 0이므로 이때, 점 P가 나타내는 원은 직선 OX에 접한다.

이를 그림으로 나타내면 [그림 1]과 같다.



[그림 1]

직선 OX가 점 P가 나타내는 원의 중심을 지날 때, s의 값이 최대 또는 최소이고, 그 값은 각각 2, $\frac{2}{3}$이므로 구하는 값은 $\frac{4}{3}$이다.

29. [정답] 24

[해설]

step Ⅰ : 주어진 기하적 상황을 해석하고, 타원의 정의를 사용하자.
선분 F′B의 중점이 A이고 삼각형 F′BC의 무게중심이 점 F이므로, 점 F는 선분 AC를 1 : 2로 내분하는 점이다.
따라서 $\overline{\mathrm{AF}}=x$라 하면

$\overline{\mathrm{CF}}=\overline{\mathrm{CF'}}=2x$

이고, 타원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{CF}}+\overline{\mathrm{CF'}}=\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{AF'}}$

$\Rightarrow\ \overline{\mathrm{AF'}}=3x$

이다.

step Ⅱ : 기하적 상황에서 방정식을 세워 미지수를 구하자.
$\overline{\mathrm{AF'}}=\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{CF'}}$이므로, 선분 AF′을 지름으로 하는 원이 점 C를 지난다. 따라서 $\angle\mathrm{BCF'}=\frac{\pi}{2}$이고, 삼각형 F′BC에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{BC}}=6\sqrt{2}$

$=\sqrt{(3x)^2-x^2}$

$=2\sqrt{2}\,x$

$\Rightarrow x=3$

이다. 선분 BC가 x축과 만나는 점을 D라 하면 점 D는 선분 BC의 중점이고, 점 F는 선분 DF′을 1 : 2로 내분하는 점이다. 삼각형 F′DC에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{DF'}}=\sqrt{3^2+(3\sqrt{2})^2}=3\sqrt{3}$

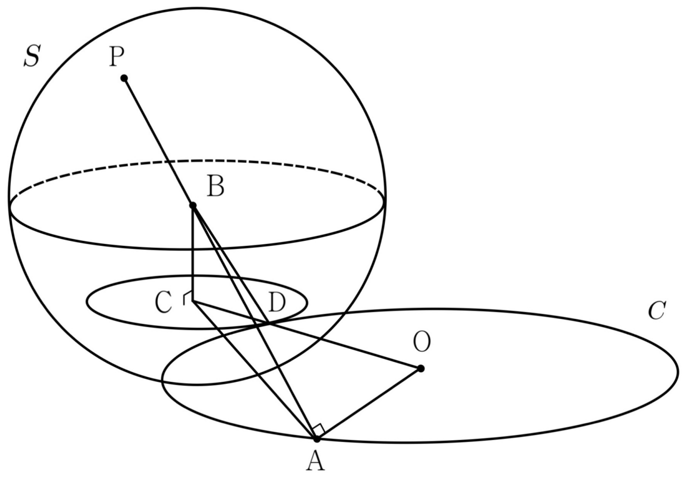
$\Rightarrow \overline{\mathrm{FF'}}=2\sqrt{3}$

이다. 타원의 장축의 길이는 6이므로, 구하는 값은
$k^2=6^2-(2\sqrt{3})^2=24$이다.

30. [정답] 43

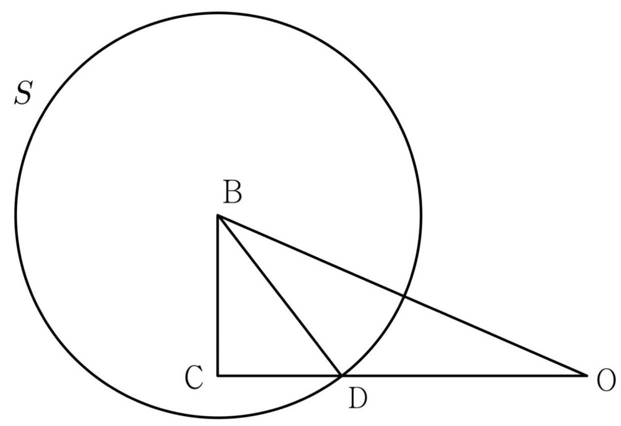
[해설]

step Ⅰ : 주어진 상황을 관찰할 때, 필요한 점들을 확인하자.
구 S의 중심을 B라 하자. 구 S 위의 점 P를 점 A와 점 P 사이의 거리가 최대가 되도록 잡을 때, 점 P는 직선 AB가 구 S와 만나는 두 점 중 점 A와의 거리가 더 큰 점이다. 점 B에서 원 C를 포함하는 평면에 내린 수선의 발을 C라 하고, 구 S와 원 C가 만나는 점을 D라 할 때, 점 C를 중심으로 하고 점 D를 지나며 원 C와 같은 평면에 있는 원은 원 C와 외접한다. 이를 그림으로 나타내면 [그림 1]과 같다.



[그림 1]

step Ⅱ : 점 B와 원 C를 포함하는 평면 사이의 거리를 구하자.
이때 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AP}}-\overline{\mathrm{BP}}=8-3=5$이고, 삼각형 ABO에서 피타고라스 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{OB}}^2=\overline{\mathrm{AO}}^2+\overline{\mathrm{AB}}^2=4^2+5^2=41$이다.
주어진 상황을 평면 BCO에 수직인 방향에서 바라본 것을 나타내면 [그림 2]와 같다.



[그림 2]

$\overline{\mathrm{BC}}=x,\ \overline{\mathrm{CD}}=y$라 하면 두 삼각형 CBO와 CBD에서 피타고라스 정리에 의하여

$x^2+y^2=3^2,\ x^2+(y+4)^2=41$

$\Rightarrow\ (x^2+y^2)+8y+16=41$

$\Rightarrow y=2,\ x=\sqrt{7}$

이다. 각 θ에 대하여 $\sin^2\theta=\frac{x^2}{5^2}=\frac{7}{25}$이므로
$\cos^2\theta=1-\frac{7}{25}=\frac{18}{25}$이다. 따라서 구하는 값은 $18+25=43$이다.