TEAM 수리남's 9월 모의고사 주요문항 해설(9번)

9. 함수 $f(x)=x^2+x$에 대하여

$$5\int_0^1 f(x)\,dx-\int_0^1 (5x+f(x))\,dx$$

의 값은? 〔4점〕

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

[2025학년도 9월 모의고사 9번]

해설) 적분 구간이 0에서 1로 같고, 함수 $f(x)$의 식도 주어져 있으므로 적분식을 하나로 합쳐서 계산만 하면 된다.

$$5\int_0^1 f(x)\,dx-\int_0^1(5x+f(x))\,dx$$
$$=\int_0^1(4f(x)-5x)\,dx$$
$$=\int_0^1(4x^2-x)\,dx$$
$$=\left[\frac{4}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$
$$=\frac{4}{3}-\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$$

정답: ⑤

TEAM 수리남's 9월 모의고사 주요문항 해설(10번)

10. $\angle A > \dfrac{\pi}{2}$ 인 삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자.

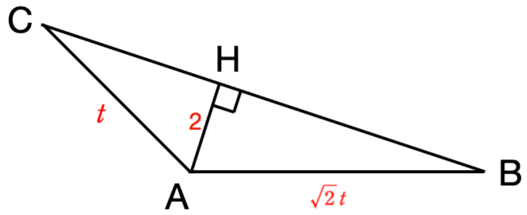
$$\overline{AB} : \overline{AC} = \sqrt{2} : 1, \quad \overline{AH} = 2$$

이고, 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 50π일 때, 선분 BH의 길이는? [4점]

① 6 ② $\dfrac{25}{4}$ ③ $\dfrac{13}{2}$ ④ $\dfrac{27}{4}$ ⑤ 7

[2025학년도 9월 모의고사 10번]

해설)
문제에서 주어진 조건대로 삼각형 ABC를 그려보면 다음과 같다.



외접원에 대한 정보가 나왔으므로 사인 법칙을 떠올려야 하고, 외접원의 반지름 길이 $R=5\sqrt{2}$ 이므로 $\angle B$에 대하여 사인 법칙을 이용하면 $\dfrac{t}{\sin\angle B}=2R=10\sqrt{2}$ $(\cdots$ ㉠$)$ 이다.

삼각형 ABH에서 $\sin\angle B=\dfrac{2}{\sqrt{2}\,t}$ 이므로 ㉠ 식에서 $\dfrac{\sqrt{2}\,t^2}{2}=10\sqrt{2}$ $\rightarrow$ $t^2=20$ 이다.

$\therefore \overline{BH}^2=2t^2-4=36$

정답: ①

TEAM 수리남‘s 9월 모의고사 주요문항 해설(11번)

11. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 위치가 각각

$$x_1 = t^2 + t - 6, \quad x_2 = -t^3 + 7t^2$$

이다. 두 점 P, Q의 위치가 같아지는 순간 두 점 P, Q의 가속도를 각각 p, q라 할 때, $p - q$의 값은? [4점]

① 24　② 27　③ 30　④ 33　⑤ 36

[2025학년도 9월 모의고사 11번]

해설)

두 점 P, Q의 위치가 같아지는 순간은 $t^2+t-6=-t^3+7t^2$일 때, 즉 $t=6$일 때이다.

$a_P=2$, $a_Q=-6t+14$이므로 $p-q=2-(-22)=24$이다.

정답: ①

TEAM 수리남's 9월 모의고사 주요문항 해설(12번)

12. 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이고, 수열 $\{b_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k$$

를 만족시킨다. $b_2 = -2$, $b_3 + b_7 = 0$일 때, 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제9항까지의 합은? [4점]

① -22 ② -20 ③ -18 ④ -16 ⑤ -14

[2025학년도 9월 모의고사 12번]

TEAM 수리남's TIP

등차수열의 기본적인 실전개념 중 <등차수열 + 등차수열 = 등차수열> 이라는 포인트에서 출제된 문제이다.
수열 $\{b_n\}$의 홀수항끼리, 그리고 짝수항끼리 각각 등차수열을 이룰 것이라는 생각을 바로 할 수 있어야 한다.

해설) <등차수열> 단원의 실전 개념에 대한 학습이 충분히 이루어진 학생이라면, 수열 $\{b_n\}$을 보고 어떤 수열인지 곧바로 알아챌 수 있어야 한다.

수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라고 하면,

$b_1 = a_1$
$b_2 = -d$
$b_3 = a_1 + d$
$b_4 = -2d$
$b_5 = a_1 + 2d$
$b_6 = -3d$
$\vdots$

이므로 수열 $\{b_n\}$의 홀수항끼리, 그리고 짝수항끼리 공차가 각각 d, $-d$인 등차수열을 이룬다.

문제의 조건에서 $b_2 = -d = -2$이므로 $d = 2$이고, $b_3 + b_7 = 2b_5 = 0$에서 $b_5 = 0$이다.

따라서 $\sum_{k=1}^{9} b_k = (b_1 + b_3 + \cdots + b_9) + (b_2 + b_4 + \cdots + b_8)$

$= 5 \times b_5 + \frac{b_4 + b_6}{2} \times 4$

$= 5 \times 0 + \frac{-5d}{2} \times 4$

$= -10d$

$= -20$

정답: ②

TEAM 수리남's 9월 모의고사 주요문항 해설(13번)

13. 함수

$$f(x)=\begin{cases}-x^2-2x+6 & (x<0)\\ -x^2+2x+6 & (x\geq 0)\end{cases}$$

의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 두 점을 P, Q라고 하고, 상수 $k(k<4)$에 대하여 직선 $x=k$가 x축과 만나는 점을 R이라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 선분 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $x=k$및 선분 QR로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $A=2B$일 때, k의 값은? (단, 점 P의 x좌표는 음수이다.) [4점]

① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$ ④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

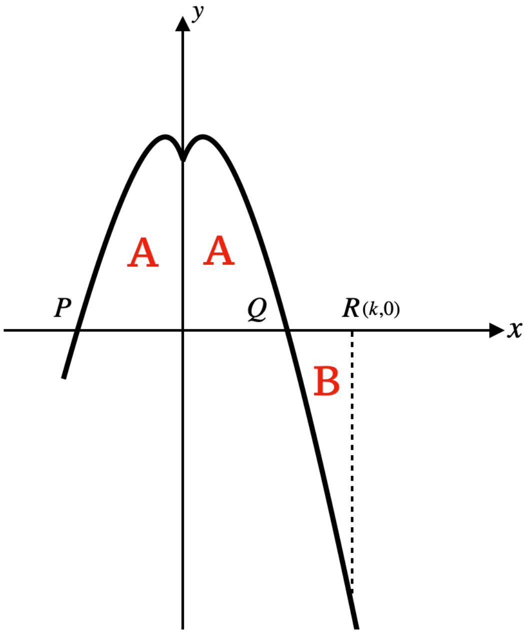
[2025학년도 9월 모의고사 13번]

TEAM 수리남's TIP

이 문제에서는 우선 주어진 함수 $f(x)$를 가능한 빠르게 그려낸 후, 조건 $A=2B$의 숨은 의미를 파악했다면 쉽게 풀 수 있는 문제였다.

만약 의미를 파악하지 못하고 넓이를 구하는 공식을 적용하는 데에만 집중했다면 함수 $f(x)$의 x절편을 구하는 등 불필요하고 복잡한 계산 과정에 빠질 수 있기 때문에, 이 문제에서도 역시 그래프를 처음에 정확히 이해하고 빠르게 그려내는 것이 가장 중요한 기초작업이 된다.

해설) 함수 $f(x)$를 그림으로 그리면 다음과 같다.



그림을 그리면서 파악해도 되지만, 함수 $f(x)$의 두 식을 잘 살펴보면 x대신 $-x$가 들어간 형태로 x대칭 형태임을 어렵지 않게 유추할 수 있다.

따라서 점 Q의 x좌표를 b라고 하면,

$$\int_0^b f(x)dx = \frac{A}{2} = B$$

한편, 문제 조건에 따라 $\int_b^k f(x)dx = -B$

따라서,

$$\int_0^k f(x)dx = 0$$

의 식을 얻을 수 있다.

계산을 마무리하면,

$$\int_0^k f(x)dx = \int_0^k (-x^2+2x+6)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+6x\right]_0^k$$

$$= -\frac{1}{3}k^3+k^2+6k = 0$$

$k=6$

정답: ④

TEAM 수리남's 9월 모의고사 주요문항 해설(14번)

14. 자연수 n에 대하여 곡선 $y=2^x$ 위의 두 점 A_n, B_n이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 직선 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 기울기는 3이다.
(나) $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=n\times\sqrt{10}$

중심이 $y=x$ 위에 있고 두 점 A_n, B_n을 지나는 원이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 두 점의 x좌표 중 큰 값을 x_n이라 하자. $x_1+x_2+x_3$의 값은? [4점]

① $\dfrac{150}{7}$ ② $\dfrac{155}{7}$ ③ $\dfrac{160}{7}$ ④ $\dfrac{165}{7}$ ⑤ $\dfrac{170}{7}$

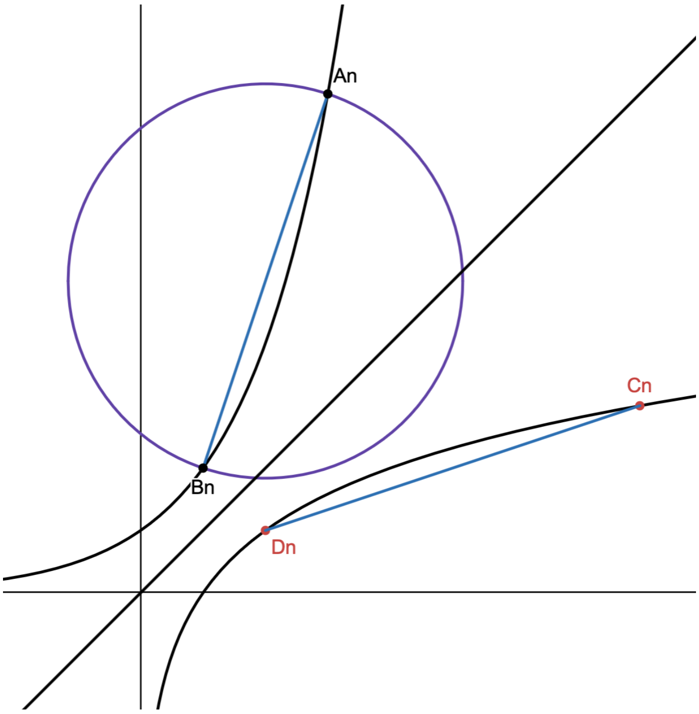
[2025학년도 9월 모의고사 14번]

TEAM 수리남's TIP

어떤 직선의 기울기가 3이고 그 직선의 길이가 나왔다는 것은, x값의 변화량과 y값의 변화량을 모두 구할 수 있음을 지금까지의 공부를 통해 바로 알았어야 한다.

$y=2^x$, $y=x$, $y=\log_2 x$가 한 문제 상에 나왔다는 것은 의심의 여지 없이 역함수, 대칭성을 이용하겠다는 것이다.

해설) 문제의 상황을 그려보면 다음과 같다.



중심이 $y=x$위에 있고 A_n, B_n을 지나는 원은 $y=\log_2 x$와 C_n, D_n과 만난다. (각각, A_n, B_n의 $y=x$에 대칭인 점)
따라서 구하고자 하는 x_n은 C_n의 x좌표이고 이는 A_n의 y좌표이다.

기울기가 $3n$이고 길이가 $n\sqrt{10}$이므로 각각 x변화량은 n, y변화량은 $3n$이다.

B_n의 x좌표를 a라하면 A_n의 x좌표는 $a+n$므로
y좌표의 차$=2^{a+n}-2^a=2^a(2^n-1)=3n$이다.

즉 $n=1, 2, 3$일 때 각각 2^a값은 $3,\ 2,\ \frac{9}{7}$이고
이때 A_n의 y좌표는 2^{a+n}이므로 각각 $6,\ 8,\ \frac{72}{7}$이다.

$\therefore\ x_1=6,\ x_2=8,\ x_3=\frac{72}{7}$이다. 따라서 답은 $\frac{170}{7}$

정답: ⑤

TEAM 수리남's 9월 모의고사 주요문항 해설(15번)

15. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$는 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_{1}^{x} tf(t)dt + \int_{-1}^{x} g(t)dt = 3x^4 + 8x^3 - 3x^2$

(나) $f(x) = xg'(x)$

$\int_{0}^{3} g(x)dx$의 값은? [4점]

① 72 ② 76 ③ 80 ④ 84 ⑤ 88

[2025학년도 9월 모의고사 15번]

TEAM 수리남's TIP

정적분을 포함한 함수로 이루어진 항등식의 기본은 1)대입 2)미분이라는 것을 다 알고 있을 것이다.
이 문제는 함수들이 다 다항함수이므로, 다항함수 항등식의 기본인 차수비교, 계수비교 등까지 갈 수 있다는 것을 염두에 두고 문제를 시작해야한다.

적분의 계산의 기본 사고 과정 순서는 다음과 같다.
1) 미분의 역연산 2) 치환적분 3) 부분적분

해설) (가)식의 양변을 미분해보면 $xf(x)+xg(x)=12x^3+24x^2-6x$

$\therefore\ f(x)+g(x)=12x^2+24x-6$

(나)조건에서 $f(x)=xg'(x)$라 했으므로 이를 위 결과에 대입하면

$xg'(x)+g(x)=12x^2+24x-6$이고 이는 미분의 역연산을 떠올리면
$(xg(x))'=12x^2+24x-6$임을 알 수 있다.

이를 양변 적분하면,
$xg(x)=4x^3+12x^2-6x+C$임을 알 수 있다. $g(x)$는 다항함수이므로 $C=0$이여야만 x를 약분할 수 있다.

$\therefore\ g(x)=4x^2+12x-6$
$\therefore\ \int_0^3 g(x)dx=72$

정답: ①

TEAM 수리남‘s 9월 모의고사 주요문항 해설(20번)

20. 닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases}\sin x-1 & (0\le x<\pi)\\ -\sqrt{2}\sin x-1 & (\pi\le x\le 2\pi)\end{cases}$$

가 있다. $0\le t\le 2\pi$인 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=f(t)$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 모든 t의 값의 합은 $\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

[2025학년도 9월 모의고사 20번]

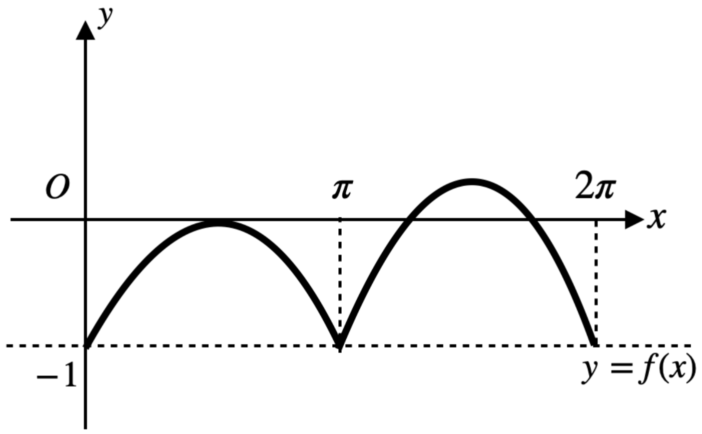
TEAM 수리남's TIP

이 문제에서는 우선 주어진 함수 $f(x)$를 가능한 빠르게 그려낸 후, 가장 특징적인 조건 $f(x)=f(t)$를 해석하는 것이 가장 관건이 되겠다.

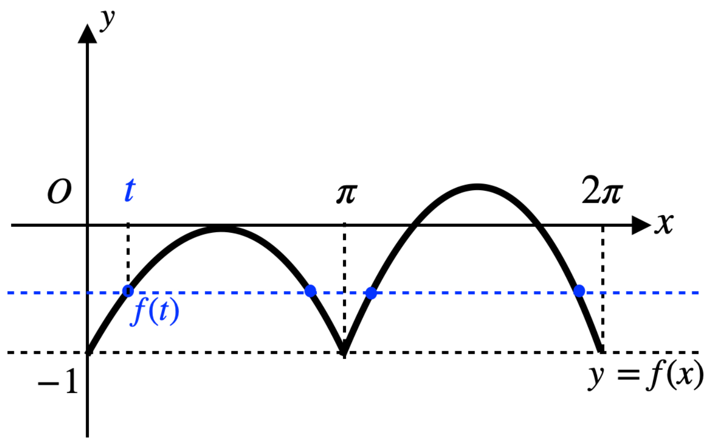
t의 범위가 주어지고 그에 따라 함수 $f(x)$와 관련된 방정식의 해를 조사하는 문제는 다양한 양상으로 출제될 수 있지만, 문제풀이의 핵심은 $f(x)$의 그래프를 빠르게 그리고 방정식 $f(x)=f(t)$의 의미가 무엇인지 시각적으로 파악하는 것으로 동일하다.

문제가 어렵게 느껴졌다면 반드시 잘 정리해두자.

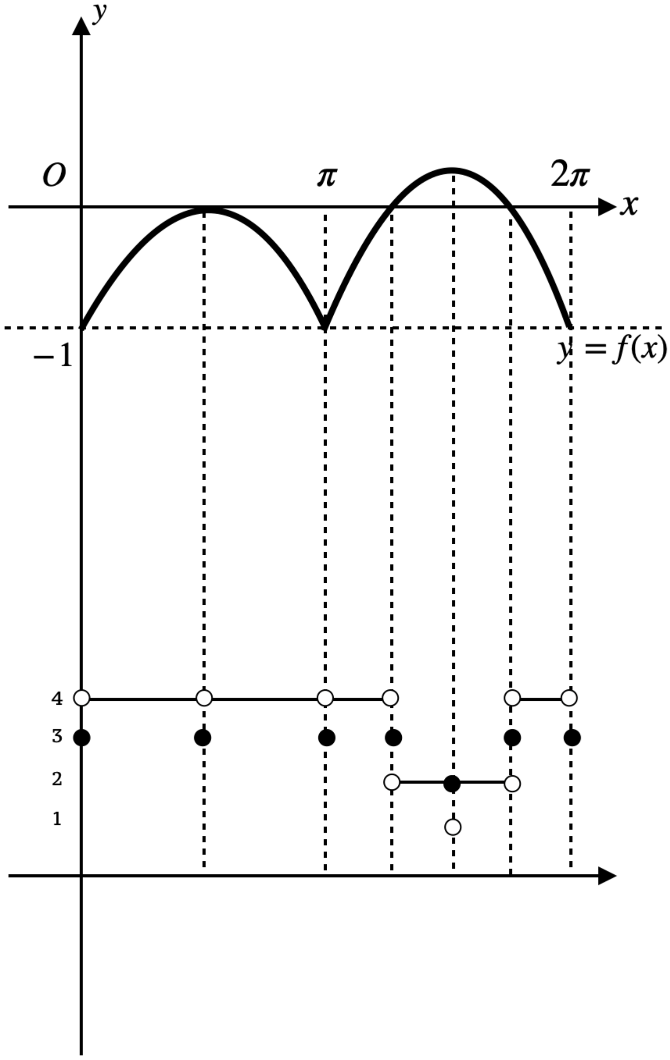
해설) $f(x)$의 그래프를 그리면 아래와 같다.



여기서 조건 $f(x)=f(t)$의 해는, 아래 그림과 같이 준 범위 $0 \leq t \leq 2\pi$인 실수 t에 대하여 함수 $f(x)$의 그래프와 함수 $y=f(t)$의 교점의 개수와 같다.



위 예시와 같이 준 범위 $0 \leq t \leq 2\pi$ 전체에서 $f(x)=f(t)$인 교점의 개수를 함수로 표현하면 아래 그림과 같이 그릴 수 있다.



따라서 위에서 교점의 개수가 3일 때의 전체 해의 합을 구하면,

$$0+\frac{\pi}{2}+\pi+\left(\frac{3\pi}{2}\times 2\right)+2\pi=\frac{13\pi}{2}$$

$p+q=15$

정답: 15

TEAM 수리남's 9월 모의고사 주요문항 해설(21번)

21. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 모든 정수 k에 대하여

$$2k-8 \leq \frac{f(k+2)-f(k)}{2} \leq 4k^2+14k$$

를 만족시킬 때, $f'(3)$의 값을 구하시오. [4점]

[2025학년도 9월 모의고사 21번]

TEAM 수리남's TIP

양쪽으로 부등식이 주어져 있을 경우에는 양쪽 식이 같아지는 경우를 찾아서 등식을 만들어주는 것이 중요하다는 것을 15학년도 9평 A형 21번과 같은 기출문제에서 배웠다는 것을 떠올리면 된다.
함숫값의 차가 나오니까 정적분으로 바꿔주면 계산도 간단. 미지수가 2개라는 것만 눈치채면 된다.

해설) $2k-8$과 $4k^2+14k$가 같아지는 k의 값은 -2, -1이다.
이를 주어진 부등식에 대입해보면
$f(0)-f(-2)=-12$, $f(1)-f(-1)=-10$이라는 등식을 얻어낼 수 있다.

함숫값의 차가 나왔으므로 정적분의 형태로 바꿔주게 되면

$\int_{-2}^{0} f'(x)dx=-12$, $\int_{-1}^{1} f'(x)dx=-10$이라는 것을 알 수 있고, $f'(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이므로, 이 문제의 미지수는 2개라는 것을 알 수 있다.(문제에서 구하는 값도 $f'(x)$의 정보)

$f'(x)=3x^2+ax+b$로 세팅하고 계산하면, $a=5$, $b=-11$임을 알 수 있다.

따라서, $f'(3)=31$임을 알 수 있다.

정답 : 31

TEAM 수리남's 9월 모의고사 주요문항 해설(22번)

22. 양수 k에 대하여 $a_1 = k$인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_2 \times a_3 < 0$

(나) 모든 자연수 n에 대하여

$$\left(a_{n+1} - a_n + \frac{2}{3}k\right)(a_{n+1} + ka_n) = 0$$ 이다.

$a_5 = 0$이 되도록 하는 서로 다른 모든 양수 k에 대하여 k^2의 값의 합을 구하시오. [4점]

[2025학년도 9월 모의고사 22번]

TEAM 수리남's TIP

연필을 들고 문제 풀이를 무작정 바로 들어가는 것보다, 큰 틀에서 어떻게 풀어낼지를 계획하고 들어갈 수 있다면 그렇게 하는 것이 전체 시간 소요의 측면에서 더 빨리 풀 수 있어 훨씬 효율적이다.

a_2와 a_3 간의 조건에 대한 것은 a_1에서 시작하여 정방향으로,

$a_5 = 0$이라는 조건은 a_5에서 시작하여 역방향으로 분석하는 것이 유리해보인다.

해설) 먼저 (나) 조건으로부터 a_{n+1}을 보기 좋게 정리해주면,

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n-\dfrac{2}{3}k \\ -ka_n \end{cases}$$ 이다.

a_{n+1}은 a_n에 $\dfrac{2}{3}k$를 빼거나, $-k$를 곱해서 정의되고 있고, a_n의 값에 상관없이 두 가지 중 아무 것으로나 선택하면 된다.

(가)에서 a_2와 a_3 간의 관계에 대한 조건이 있고, $a_5=0$인 경우를 찾고 있으므로
① $a_1=k$에서 출발하여 정방향으로 a_3까지 작성하여 (가) 조건을 만족시키는 경우를 찾고,
② $a_5=0$에서 출발하여 역방향으로 a_3으로 와서 ①에서 찾은 a_3 값과 같을 수 있는 경우를 찾아보자.

① $a_1 \longrightarrow a_3$ 정방향	② $a_5 \longrightarrow a_3$ 역방향
$a_1 \quad a_2 \quad a_3$ $k\begin{cases} \frac{1}{3}k \begin{cases} -\frac{1}{3}k \\ -\frac{1}{3}k^2 \end{cases} \\ -k^2 \begin{cases} -k^2-\frac{2}{3}k \\ k^3 \end{cases} \end{cases}$ 이 중 $a_2 \times a_3 < 0$를 만족하는 경우는 $a_3=\left\{-\frac{1}{3}k,\ -\frac{1}{3}k^2,\ k^3\right\}$인 경우 뿐이다.	$a_5 \quad a_4 \quad a_3$ $0\begin{cases} \frac{2}{3}k \begin{cases} \frac{4}{3}k \\ -\frac{2}{3} \end{cases} \\ 0 \begin{cases} \frac{2}{3}k \\ 0 \end{cases} \end{cases}$

이제, ①에서 찾은 a_3값 3개 중 하나와 ②에서 찾은 a_3값 4개 중 하나가 일치한다면 문제에서 찾고 있는 케이스가 되는 것이다.

예를 들어 ①에서 찾은 a_3값 중 k^3과 ②에서 찾은 a_3값 중 $\frac{4}{3}k$가 일치한다면, 오른쪽 그림과 같이 a_1~a_5가 결정된다.	$a_1 \quad a_2 \quad a_3$ $k\begin{cases} \frac{1}{3}k \begin{cases} -\frac{1}{3}k \\ -\frac{1}{3}k^2 \end{cases} \\ -k^2 \begin{cases} -k^2-\frac{2}{3}k \\ k^3 \end{cases} \end{cases}$ $a_5 \quad a_4 \quad a_3$ $0\begin{cases} \frac{2}{3}k \begin{cases} \frac{4}{3}k \\ -\frac{2}{3} \end{cases} \\ 0 \begin{cases} \frac{2}{3}k \\ 0 \end{cases} \end{cases}$

다시 문제로 돌아와서,

ⅰ) $-\frac{1}{3}k=\left\{\frac{4}{3}k,\ -\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}k,\ 0\right\}$ 중 하나 $\rightarrow k>0$ 이므로 $k=2$

ⅱ) $-\frac{1}{3}k^2=\left\{\frac{4}{3}k,\ -\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}k,\ 0\right\}$ 중 하나 $\rightarrow k>0$ 이므로 $k=\sqrt{2}$

ⅲ) $k^3=\left\{\frac{4}{3}k,\ -\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}k,\ 0\right\}$ 중 하나 $\rightarrow k>0$ 이므로 $k=\sqrt{\frac{4}{3}},\sqrt{\frac{2}{3}}$

따라서 k^2의 값의 합은 $4+2+\frac{4}{3}+\frac{2}{3}=8$ 이다.

정답: 8