설레임 기출분석집

Story 12. 확통 3/4점 일주일만에 끝내기

설레임과 함께한 마지막 이야기

Ultima fabula cum SEOL:NAME

설레임 모의고사

Team SeolName

STYLE 00

['확률과 통계' 과목에 나오는 경우의 수 세기 관련 개념 내용 한장(-두 페이지) 정리]

① 합의 법칙과 곱의 법칙

합의 법칙: 한 시행에서 두 사건(무언가를 할 때 어떤 조건을 만족하는 결과. 가령, 동전 두개를 던질 때 **두 동전 모두 앞면이 나오는**(조건) **'사건'**이라고 한다.)이 **'동시에 일어날 수 없다면'** 두 사건의 경우의 수를 더한다.

곱의 법칙: 한 시행에서 두 사건이 **'동시에 일어나야만 한 시행이 완료된다면'** 두 사건의 경우의 수를 곱한다.

예:

1. 주사위 하나, 동전 두개를 동시에 던지는 시행을 한다.
- 주사위의 눈이 3의 배수이고, 하나 이상의 동전이 앞면이도록 하는 경우의 수
  : 주사위의 눈이 3의 배수일 경우의 수는 2, 하나 이상의 동전이 앞면이도록 하는 경우의 수는 3 → **주사위 하나만 던진다고 이 시행이 끝나나? ∴ 2×3=6**

2. 주사위 두개를 동시에 던지는 시행을 한다.
- 주사위의 눈이 5의 배수가 되도록 하는 경우의 수
  : 주사위의 눈이 5(경우의 수 4) 또는 10(경우의 수 3)
  → **눈이 5 혹은 10이 나오면 시행이 끝나버리잖아? ∴ 4+3=7**

따라서 우리는, 문제에서 제시한 '시행'을 정확히 캐치해야 한다.

① 같은 것이 있는 순열

p_1이 a_1개, p_2가 a_2개, ..., p_n이 a_n개 있을 때, 이들을 나열하는 경우의 수는

$$\frac{p_1! \cdot p_2! \cdots p_n!}{a_1! \cdot a_2! \cdots a_n!}$$

② 이웃하는 순열

$a_1, a_2, \cdots, a_n$을 나열할 때

- 어떤 k개가 이웃하도록 하는 경우의 수: $(n-k+1)! \times k!$ → k개를 하나로 묶는다.
- 어떤 하나가 양 끝에 오도록 하는 경우의 수: $2 \times (n-1)!$

③ 원순열

- 처음 두는 경우의 수를 1로 두고, 나머지는 일반적인 순열로 계산한다.

예) $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}, \mathrm{E}, \mathrm{F}$를 원형 탁자에 앉힐 때, A, E를 이웃하게 하고, A, D를 이웃하지 않게 하는 경우의 수는?

→ A, E를 한 묶음으로 생각하여 먼저 탁자에 앉힌다(경우의 수 1).
→ A 옆에 D 말고 아무나 앉힌다(경우의 수 3).
→ 나머지 앉힌다(경우의 수 3!).
→ A, E가 자리를 바꿀 수 있다(경우의 수 2!).
→ 따라서 모든 경우의 수는 $3 \times 3! \times 2! = 36$

④ 여러번 중복해서 뽑는 조합 - 중복조합

- 순서가 정해진 숫자들의 순서쌍

음이 아닌 정수 $a_1, a_2, \cdots, a_n$가 $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n \le k$이도록 하는 경우의 수는 ${}_k\mathrm{H}_n$

음이 아닌 정수 $a_1, a_2, \cdots, a_n$가 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n \le k$이도록 하는 경우의 수는 ${}_k\mathrm{C}_n$

- 상자에 나눠 담기

구별되지 않는 n개의 상자에 구별되지 않는 k개의 물건을 넣는 경우의 수는 ${}_k\mathrm{H}_n$

놀랍게도, 위 내용 말고는 웬만하면 1, 2단원에서 사용되는 경우의 수 세기 개념이 없다!

STYLE 01

순열과 조합, 그 근본적인 개념부터 알아야지.

TYPE 0 고1때 배우는 경우의 수 여러가지로 웜밍업

– 2022학년도 9월 모의평가 확통 28번 : 중복조합을 쓰지 않는 함수의 개수

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \to X$의 개수는? [4점]

(가) $f(3)+f(4)$는 5의 배수이다.
(나) $f(1)<f(3)$이고 $f(2)<f(3)$이다.
(다) $f(4)<f(5)$이고 $f(4)<f(6)$이다.

① 384　② 394　③ 404　④ 414　⑤ 424

수능 문항이지만 위처럼 '확률과 통계' 과목이 아닌, '공통수학' 에서의 경우의 수 세기로만 문제를 풀 수 있는 경우가 왕왕 있어. $f(3)+f(4)$가 5 또는 10이라는 걸 (가)에서 파악하기 쉽지? 케이스 구분은 이처럼 무조건 **파악하기 쉬운 것**으로, 또 **몇개 안나눠지는 것(웬만하면 3개, 많으면 4-5개)**으로 나누어야해.

$f(3)+f(4)=10$인 경우 먼저 보자. $f(4)=6$이면 (다)를 만족할 수 없으니, $f(4)=5$ 아니면 $f(4)=4$이겠지? $f(4)=5$이면 (다) 때문에 $f(5)=f(6)=6$일 수밖에 없고, $f(3)=5$이니 (나) 때문에 $f(1)$, $f(2)$는 4 이하여야 해. 따라서 이 경우의 수는 $4^2=16$이지?(4×4인 이유는, $f(1)$, $f(2)$를 고르는 상황이 각각 별개의 시행에서 일어나는 것이 아닌, '하나의 시행'에서 일어나는 것이기 때문이야.)

$f(4)=4$이면 (다) 때문에 $f(5)$, $f(6)$은 5 이상, $f(3)=6$이므로 $f(1)$, $f(2)$는 5 이하여야 해. 따라서 이 경우의 수는 $2^2\times5^2=100$이야.

같은 방법으로 $f(3)+f(4)=5$인 경우까지 구하면, 답은 ④임을 쉽게 알 수 있어.

- 2022학년도 3월 학력평가 확통 28번 : 사탕 배급(남김없이 나누기 / 적어도 하나의 .. / 중복을 허용하여)

세 명의 학생 A, B, C에게 서로 다른 종류의 사탕 5개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수는? (단, 사탕을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [4점]

(가) 학생 A는 적어도 하나의 사탕을 받는다.
(나) 학생 B가 받는 사탕의 개수는 2 이하이다.

① 167 ② 170 ③ 173 ④ 176 ⑤ 179

‘서로 다른’ 종류의 사탕 5개라는건, 사탕 5개가 각각 **구별 가능하다**는 것임을 꼭 알아둬야해.
(가)부터 보면, 학생 A가 적어도 하나의 사탕을 받아야 하니, ‘학생 A한테 국물도 안주는’ 경우를 전체 경우에서 빼겠다는 생각을 해볼 수 있겠지? 이렇게 ‘적어도~~인 경우’로 시작하는 발문이 등장하면 ‘~~인 경우를 전체의 경우에서 제외하는 방법’을 사용할 수 있어.
(나)를 보면, 학생 B가 받는 사탕의 개수가 2 이하랬으니, 케이스 구분을 여기에서 해보자. 어떻게 할 수 있을까? 그렇지. B가 **아예 안받든지, 하나만 받든지, 두개만 받든지!**
B한테 국물도 안주면(아예 사탕을 안주면) A, C에게 사탕을 짬처리해야하는데, 이러는 모든 경우의 수는 $2^5=32$야. 사탕 하나를 주는 경우의 수 2를 사탕의 개수 5만큼 곱했어. 왜? 사탕을 5개 주는 것은 **‘한 시행에서’ 일어나는 일**이거든. 걱정마. 아직 한 시행조차 끝나지 않았어. 이 문항에서의 한 시행은 ‘$\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$에게 모든 사탕 5개를 나누어주어야’ 끝나.
B한테 사탕 하나를 주면, B에게 사탕을 주는 경우의 수 5에, 나머지 4개를 A, C에게 짬처리하는 경우의 수 $2^4=16$을 더할까? 곱할까? 당연히 곱해야겠지.
B한테 사탕 두개를 주면, B에게 사탕을 주는 경우의 수 ${}_5\mathrm{C}_2=10$에, 나머지 3개를 A, C에게 짬처리하는 경우의 수 $2^3=8$을 곱해야 하겠지.
위 세가지 케이스에서 각각 ‘32’, ‘80’, ‘80’이라는 경우의 수를 구했어. 이 세개의 수를 더해야 할까, 아니면 곱해야 할까? 이때는 더해야겠지? 각 경우의 수는 ‘**동시에 일어날 수 없는** 한 시행'이잖아. 따라서, 총 경우의 수는 192야.
근데, A한테 국물도 안주는 경우는 위 세가지 케이스에서 각각 ‘1’, ‘5’, ‘10’이니, 이 세 수를 더한 16을 192에서 빼주면 우리가 구하고자 하는 답을 얻겠지? 답은 ④야.

– 2023학년도 6월 모의평가 확통 27번 : 문자(숫자)의 배열

네 문자 a, b, X, Y중에서 중복을 허락하여 6개를 택해 일렬로 나열하려고 한다. 다음 조건이 성립하도록 나열하는 경우의 수는? [3점]

(가) 양 끝 모두에 대문자가 나온다.
(나) a는 한 번만 나온다.

① 384 ② 408 ③ 432 ④ 456 ⑤ 480

(가)를 먼저 보면, 양 끝 모두에 대문자가 나와야 하네? 대강 어떤 느낌인지 그려지지? (나)를 보면 a가 한 번만 나온다고 하네? 그렇다면, 둘 중 어느 조건을 기준으로 케이스를 구분해야할까?

아무래도 **(가)를 기준으로 케이스를 구분하는게 좋겠지? (나)는 a가 한번만 나오지 않는 경우를 다섯 가지나 세어야 하잖아.**

(가)를 기준으로, 양끝에 X, X/X, Y/Y, Y가 나오도록 하는 경우의 수를 세어보자.

양끝에 X, X가 나오면, 가운데 네 자리에는 어떤 것이 나와도 상관 없어. 단, a가 하나만 포함되어야겠지. 그렇다면 a 하나가 가운데 네 자리 중 하나를 차지하는 경우의 수는 4이겠네? 나머지 세 자리 각각에는 b, X, Y중 하나가 오면 되는 것이니, 그 경우의 수가 $3^3 = 27$임을 알 수 있어.

양 끝에 X, Y가 나오면, 맨 앞에 X가 올 수도, Y가 올 수도 있으니 경우의 수에 2를 곱해줘야겠지? 가운데 네 자리에 문자들이 오는 경우의 수는 아까와 전혀 다름이 없으니 $4 \times 27 = 108$임을 알 수 있어.

양 끝에 Y, Y가 나오는 것 또한 마찬가지! 가운데 네 자리에 문자들이 오는 경우의 수는 아까와 전혀 다름이 없으니 $4 \times 27 = 108$임을 알 수 있어.

따라서 우리가 구하고자하는 경우의 수는 $108 + 216 + 108 = 432$야.

TYPE 1 얘를 만족하는 함수의 개수를 구하세요!

[2024학년도 6월 모의평가 확통 28번]

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \to X$의 개수는? [4점]

(가) $f(1)\times f(3)\times f(5)$는 홀수이다.
(나) $f(2)<f(4)$
(다) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 3이다.

① 128　② 132　③ 136　④ 140　⑤ 144

우리만의 실전 풀이

THINKING!

아까까지는 아주 간단한 몸풀이 겸(?) 4점짜리 문항을 풀어봤어. 처음 다뤄볼 유형은 '함수의 개수'인데, 요즘 함수의 개수 조건으로 다음과 같은 이야기를 물어보는 경향이 커.

1) **함숫값의 곱/합(/차)이 홀수 혹은 짝수이다.**

2) **함숫값의 대소관계**

3) **어떤 특정한 함숫값**

위 세개가 (가), (나), (다)로 나오는 문항들이 최근 사설 모의고사나 평가원 기출에서 자주 보여. 우리는 **1)이나 3)을 이용해 케이스 구분 쫙 해준다음, 2)를 이용해 중복조합으로 문항을 해결해주기만 하면 돼!**

STEP 1 **케이스 구분 먼저 해보자**

일단, (가) 먼저 살펴보자. **어떤 수들의 곱이 홀수라는 것은, 그 수들이 모두 홀수여야만 한다는 이야기**야. 그러니 $f(1), f(3), f(5)$가 모두 홀수라는 이야기겠네? 음.. 근데 아직은 경우의 수가 너무 무궁무진한거 같은데.. 다음 조건 마저 볼까?

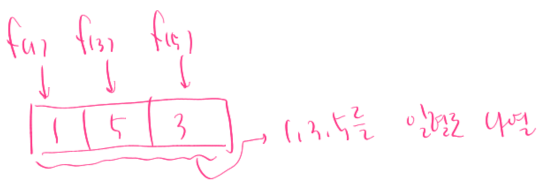
(나)를 보면 $f(2) < f(4)$라고 되어있네? 음.. 얘도 경우의 수가 너무 많아. ${}_5C_2$개나 되잖아? 아, 왜 ${}_5C_2$개이냐면, 공역의 원소가 5개이니, $f(2)$, $f(3)$를 정하는 경우의 수가 $5\times4=20$이긴 한데, $f(2)<f(3)$이라는 조건때문에 $f(2), f(3)$의 순서가 정해지잖아. 그래서 순열을 사용하는 것!

(다)를 보면 f의 치역의 원소, 즉 **서로 다른 함숫값**이 3개라고 되어있네? 오.. (가), (나)가 무리이니 아무래도 얘를 좀 이용해야할 것 같아.

어떻게 사용해야 할까? 이때 다시 (가)와 (나)를 살펴보는거야. (가)에서 세 수가 홀수여야 하니, 세 수가 모두 다르면 치역의 원소가 3개일 수 있겠지? 둘은 같고 하나가 다르면? 셋 다 같다면? 오, 케이스도 세개로 깔끔하게 나눠지고 좋네. '치역'에 대한 조건을 줬으니 '함숫값'에 집중하는 것은 당연지사!

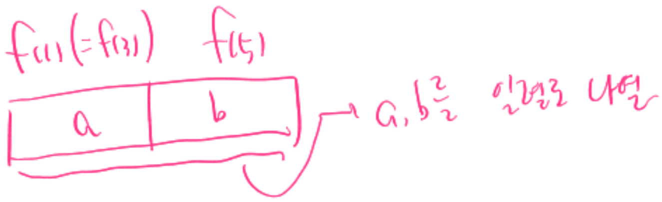
STEP 2 **(가)와 (다)를 기준으로 구분하자**

먼저, $f(1), f(3), f(5)$가 모두 다르다면, 이들을 정하는 경우의 수는 $3!=6$임을 알 수 있어. 공역 X의 원소 중 홀수인 것은 3개니까, 대강 이런 느낌으로 경우의 수를 정하는거야.



$f(1)$상자, $f(3)$상자, $f(5)$상자에 숫자 $1, 3, 5$가 각각 적힌 공 3개를 각 상자 당 한개씩 넣는 느낌이랄까.. 아니면 **$f(1)$자리, $f(3)$자리, $f(5)$자리를 고정해 두고 $1, 3, 5$의 순서를 바꿈으로써 $f(1), f(3), f(5)$가 결정**되도록 하는 느낌. (사소해보이지만 지나치게 강조하는데는 다 이유가 있답니다~)
다시 문제 풀이로 돌아와서, 이때 $f(2), f(4)$는 각각 $1, 3, 5$중 하나여야 하므로 두 수를 정하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2=3$이겠네.

$f(1), f(3), f(5)$ 중 두 수는 같고 하나가 다르다면, 생각해야 할 게 두가지. '셋 중 어떤 두 수가 같은데?'와 '$1, 3, 5$ 중 어떤 홀수가 $f(1), f(3), f(5)$이지?' 전자를 생각하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2=3$, 후자를 생각하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2\times 2!=6$. 홀수 두개를 택하는 경우의 수에, 그 두 수를 나열하는 경우의 수를 곱한거야. 가령, $f(1)=f(3)$이라 하면, **$f(1)=f(3)$과 $f(5)$의 값을 결정하기 위해 $1, 3, 5$ 중 두개를 택하고 나열**해야 하잖아. 그림 다시 보여줄까?



그래서, 위 상황에서 $f(1), f(3), f(5)$를 결정하는 경우의 수는 $3\times 6=18$이야. 이때, $f(2)$, $f(4)$중 하나는 $f(1), f(3), f(5)$ 중 **하나와 겹치고, 하나는 겹치지 않아야 해.** 따라서 두 수를 택하는 경우의 수는 $2\times 3=6$이고, **크기 순서에 따라 $f(2), f(4)$가 결정되니 둘 중 어떤 게 $f(2)$이고 어떤게 $f(3)$인지는 생각할 필요 없이 경우의 수가** 1.

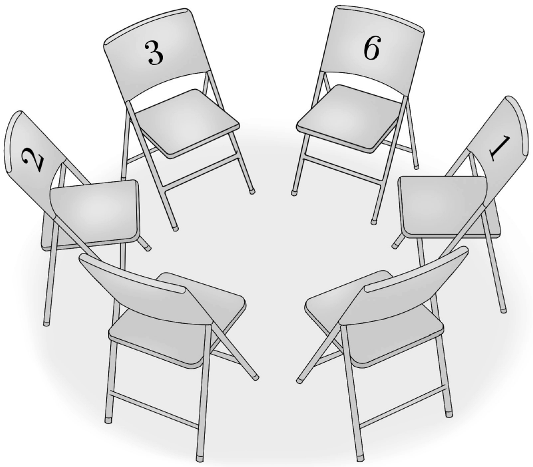
$f(1), f(3), f(5)$가 모두 같도록 하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1=3$이고, $f(2)$, $f(4)$는 모두 $f(1)(=f(3)=f(5))$와 달라야 하기 때문에 나머지 수 4개 중 2개(=${}_4\mathrm{C}_2=6$를 택하면 된다. 역시, **크기 순서에 따라 $f(2), f(4)$가 결정되니 둘 중 어떤 게 $f(2)$이고 어떤게 $f(3)$인지는 생각할 필요 없이 경우의 수가** 1.

모든 경우의 수를 세어주면 $6\times 3+18\times 6+3\times 6=144$.

TYPE 2-1 얘를 만족하도록 나열하세요! - 원순열

[2022학년도 6월 모의평가 확통 29번]

1 부터 6 까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 6 개의 의자가 있다. 이 6 개의 의자를 일정한 간격을 두고 원형으로 배열할 때, 서로 이웃한 2 개의 의자에 적혀 있는 수의 곱이 12 가 되지 않도록 배열하는 경우의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]



우리만의 실전 풀이

THINKING!

원순열은 어떻게 생각하자고 했지? 일렬로 놓는 순열과 똑같이 생각하되, 제일 먼저 배열하는 것의 경우의 수를 1로 두자고 했지? 그 이유는 **'회전하여 일치하는 것을 같은 것으로 보기'** 때문이야. 원순열이라고 겁먹지 말고, 하던 대로 하자.

STEP 1 **역시, 케이스 구분 먼저**

문항에서 얻을 수 있는 정보를 정리해보자.

1) 의자가 총 6개이고, 각각 숫자 $1, 2, 3, 4, 5, 6$이 하나씩 적혀있다.
2) 서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의 곱이 12여선 안된다.

정보가 2개 밖에 없고, 심지어 1) 가지고 어떻게 케이스 구분을 할 수 있을까? 아무래도 2)를 기준으로 케이스를 구분해야 할 것 같아.

또, 생각해보면 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의 곱이 12인 경우가 한번이라도 있는 경우와, 그렇지 않은 경우 중, 무엇이 더 세기 편리할까? 아무래도 전자이겠지? 전자의 경우의 수를 구한 다음 전체 경우의 수에서 빼주면 우리가 구하고자 하는 경우의 수가 나오겠다. 이렇게 **여사건을 항상 염두에 두고 있어야 한다**는 것, 꼭 잊지 말자.

그러면, 다음과 같이 케이스를 구분할 수 있겠네.

1) $2, 6$이 적힌 의자가 이웃하는 경우
2) $3, 4$가 적힌 의자가 이웃하는 경우
3) $2, 6$, $3, 4$가 적힌 의자가 각각 모두 이웃하는 경우 (1번과 2번의 교집합)

3)을 구하는 이유는, **1)과 2)에서 중복 카운팅되는 경우를 제거해주기 위해!**

↓

STEP 2 **원순열이 대수랴!**

먼저 1)을 살펴보자. 1)을 만족하는 경우의 수는 $2, 6$을 묶은 한 세트와 나머지 네 개의 숫자를 생각할 때 이 5개의 묶음을 원으로 나열하는 경우의 수와 같아. $2, 6$ **묶음을 먼저 나열하는 것이 다른 것들을 먼저 나열하는 것보다 훨씬 편리**해(안믿겨지면 직접 해봐.). 따라서 5개의 묶음을 나열하는 경우의 수는 $4!$. 왜냐니? $2, 6$ 묶음을 나열하는 경우의 수는 1 취급하기로 했었잖아. 또, $2, 6$은 둘이 자리를 바꿀 수 있으니 그 경우

의 수 $2!$를 (더하는게 아니라)곱하면 되겠군. 따라서 1)의 경우의 수는 $4! \cdot 2! = 48$임을 알 수 있어.

2)의 경우의 수 역시 마찬가지. $2, 6$이 $3, 4$로 바뀐 것 뿐이잖아? 그러면 2)의 경우의 수도 $4! \cdot 2! = 48$겠네.

3)의 경우의 수는 어떻게 하면 될까? 그렇지! $2, 6$을 한 묶음, $3, 4$를 한 묶음, 나머지 두 수를 생각하면 되겠지? 그러면 총 4개의 묶음이 있고, 그 중 하나를 먼저 나열하는 경우의 수는 1, 나머지 3개의 묶음을 나열하는 경우의 수는 $3!$. 이때 $2, 6$과 $3, 4$는 각각 서로 자리를 바꿀 수 있으므로 그 경우의 수는 $2! \cdot 2! = 4$. 그러니 3)의 경우의 수는 $6 \times 4 = 24$임을 알 수 있어.

따라서, 종합해보면 우리가 구해야 하는 경우의 수는 (1번 경우의 수) + (2번 경우의 수) - (3번 경우의 수)이니, 전체 경우의 수는 $48 + 48 - 24 = 72$임을 알 수 있어.

근데, 여기서 끝내면 너무 슬퍼. 우리는 **전체 경우의 수에서 제거해야 할 경우의 수를 찾은거지, 구하고자 하는 경우의 수를 찾은게 아니거든.** 하지만 전체 경우의 수는 그냥 $(6-1)! = 120$이지? 그러니 120에서 72를 빼주면, 우리가 구하고자 하는 경우의 수는 $120 - 72 = 48$임을 알 수 있어.

TYPE 2-2 얘를 만족하도록 나열하세요! - 카드 나열

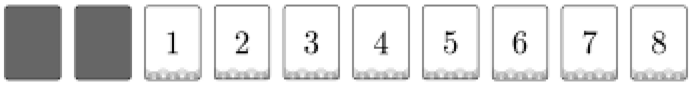
[2024학년도 6월 모의평가 확통 29번]

그림과 같이 2장의 검은색 카드와 1부터 8까지의 자연수가 하나씩 적혀있는 8장의 흰색 카드가 있다. 이 카드를 모두 한 번씩 사용하여 왼쪽에서 오른쪽으로 일렬로 배열할 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오. (단, 검은색 카드는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

(가) 흰색카드에 적힌 수가 작은 수부터 크기순으로 왼쪽에서 오른쪽으로 배열되도록 카드가 놓여 있다.

(나) 검은색 카드 사이에는 흰색 카드가 2장 이상 놓여 있다.

(다) 검은색 카드 사이에는 3의 배수가 적힌 흰색 카드가 1장 이상 놓여 있다.



우리만의 실전 풀이

THINKING!

카드 나열도 역시 똑같아. 케이스 깔끔히 구분한 다음, 보이는 대로 경우의 수 계산하기!

STEP 1 또다시, 케이스 구분. 그런데 이제 조금의 아이디어를 곁들인

문제 상황을 살펴보자. 검은색 카드 두 장 사이에 흰색 카드가 두 장 이상 있도록, 또 3의 배수가 적힌 흰색 카드가 한 장 이상 있도록 두어야 해. 아무래도 (가)보다는 (나), (다) 중 하나를 기준으로 케이스를 구분하면 될 것 같아.

그전에, (가)를 잘 해석해보자. 흰 카드에 적힌 숫자는 오른쪽으로 갈수록 무조건 커야하지? **그래서, 흰색 카드를 나열하는 경우의 수는 고려하지 않아도 돼.** 이러한 점을 미리 충분히 인지하고 뛰어들면 아주 효율적으로 문제를 풀이할 수 있어.

(나)를 생각하려면 어떻게 해야할까? 두 가지 방법이 있어. 하나는 흰색 카드 사이사이에 검은색 카드를 넣는 생각, 다른 하나는 검정색 카드 사이사이에 흰색 카드를 넣는 생각인데, 놀랍게도 후자가 좀 더 계산하기 쉬워. 왜냐하면 전자의 경우 검은색 카드 사이에 흰색 카드가 없는 경우, 하나만 있는 경우, 둘 이상인 경우로 또 나눠서 생각해야 하지만 **후자의 경우 '검은색 카드 사이에 흰색 카드가 둘 이상 있어야 한다'고만 설정해주면 되거든**.

사실, 웬만한 킬러 문항은 풀이 방법이 비슷한 경우가 많아. 두 검은색 카드 왼쪽에 오는 흰색 카드의 수를 x, 두 검은색 카드 사이에 오는 흰색 카드의 수를 y, 두 검은색 카드 오른쪽에 오는 흰색 카드의 수를 z라 하면 $x+y+z=8$이어야 하고, y가 2 이상이어야 한다는 거겠구나. $y=y'+2$라 하면 $x+y'+z=6$이어야겠지? 이를 만족하는 음이 아닌 정수 x, y', z의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_6={}_8\mathrm{C}_6=28$이야.

STEP 2 케이스 구분만 하면 70%는 한거지 뭐

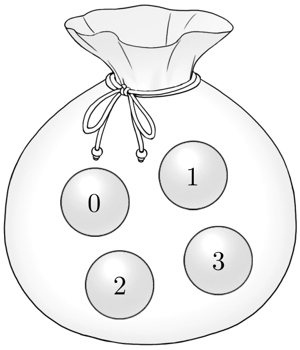
이제 (다)만 살펴보면 되겠네? 3이나 6이 두 검은색 카드 사이에 적어도 하나 있어야 하는데, 각각 따지기 보다는 전체 경우의 수에서 두 수(3과 6) 모두 없는 경우의 수를 빼주는 게 편하겠지?(**여전히 여사건은 위대하군**)

근데 이건 계산을 안해도 알 수 있잖아? 두 카드 사이에 $1, 2$가 있을 때, $4, 5$가 있을 때, $7, 8$이 있을 때밖에 안되네. 따라서 우리가 구하고자 하는 경우의 수는 $28-3=25$.

TYPE 2-3 얘를 만족하도록 나열하세요! - 주머니에서 공 꺼내기

[2019학년도 3월 학력평가 가형 29번]

주머니 속에 네 개의 숫자 0, 1, 2, 3이 각각 하나씩 적혀있는 공 4개가 들어 있다. 이 주머니에서 1개의 공을 꺼내어 공에 적혀있는 수를 확인한 후 다시 넣는다. 이 과정을 3번 반복할 때, 꺼낸 공에 적혀있는 수를 차례로 a, b, c라 하자. $\frac{bc}{a}$가 정수가 되도록 하는 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수를 구하시오. [4점]



우리만의 실전 풀이

THINKING!

주머니에서 공 꺼내는 거라고 다를까? 여전히 케이스 구분 후 합/곱의 법칙 야무지게 사용하면 스르륵 풀리는 유형. 하지만 앞에선 '한 시행'에서의 경우의 수를 물었다면, 여기에선 '여러번의 시행'에서의 경우의 수를 물어보고 있어. 하지만, '여러번의 시행' 역시 **'연속적으로(=동시에)' 일어나고 있으니 곱의 법칙으로 해결**해주면 끝!

STEP 1 **시작은? 역시 케이스 구분**

문제 조건을 해석해보자. $0, 1, 2, 3$ 중 한 수를 뽑는 시행을 3번 했을 때 나온 수를 각각 a, b, c라 할 때, $\frac{bc}{a}$가 정수이도록 하는 경우의 수를 구하라고 하네. **(가), (나) 조건과 같이 텍스트로 명시된 조건이 없으니 우리가 스스로 찾아내어야해.** 근데, 구분할 거리가 a, b, c중 하나밖에 없지? 근데 또 b, c중 하나를 기준으로 나누기엔 뭔가 애매해. 분모가 완전해 약분되느냐를 알아봐야하는데 분자를 기준으로 나눈다? 그러면 a를 기준으로 나눠야하지 않을까?

또, a가 0일 수도 없으니 $a=1, 2, 3$(총 3개의 경우의 수)을 기준으로 나누면 되겠네!

STEP 2 **케이스 구분한 대로 가자!**

$a=1$일 때 b, c는 뭐가 되었든 $\frac{bc}{a}$가 정수이겠지? 따라서 가능한 경우의 수는 $4^2=16$.

$a=2$일 때 b, c가 모두 0이 아니라면 bc가 2의 배수여야해. 따라서 b, c가 모두 홀수인 경우의 수 2^2을 전체 경우의 수 4^2에서 뺀 $4^2-2^2=12$가 가능한 경우의 수야.
$a=3$일 때 b, c가 모두 0이 아니라면 bc가 3의 배수여야해. 따라서 b, c가 모두 0이 아니면서 3도 아닌 경우의 수 2^2을 전체 경우의 수 4^2에서 뺀 $4^2-2^2=12$가 가능한 경우의 수야.

모두 더해주면 우리가 구하고자 하는 경우의 수가 나오겠지? 답은 $16+12+12=40$.

근데.. 난도 높기로 악명 높은 가형 시험지, 그것도 29번 문항이 이렇게 간단하다? 그런데 오답률도 2위(ebsi 기준 65.5%)??
~~(제작자 또 위험한 발언 시작한다)~~

TYPE 2-4 얘를 만족하도록 나열하세요! - 숫자 나열

[2021학년도 3월 학력평가 확통 30번]

숫자 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허락하여 네 개를 선택한 후 일렬로 나열할 때, 다음 조건을 만족시키도록 나열하는 경우의 수를 구하시오. [4점]

(가) 숫자 1은 한 번 이상 나온다.
(나) 이웃한 두 수의 차는 모두 2 이하이다.

우리만의 실전 풀이

THINKING!

숫자의 나열 역시 전혀 다르게 없어. 이렇게 보면 그냥 형태만 숫자, 카드, 주머니, 상자 등.. 형태는 휘황찬란하지만 본질은 똑같다! 케이스 구분 후 나열하기 ...

STEP 1 **숨 참고 Case 구분**

역시, 문항에서 준 정보를 한번 살펴보자.

1) $1, 2, 3, 4$를 중복해 선택할 수 있고,
2) 무조건 숫자 1을 한번은 써야 하며,
3) 이웃한 두 수의 차는 3일 수 없겠네?

2) 아니면 3)을 기준으로 구분해야할 것 같아. 그런데 둘 다 그다지 복잡한 조건이 아닌 경우 두 조건을 모두 사용할 수도 있어. 2)를 먼저 보면, 전체 경우의 수인 $4^4 = 256$에서 1이 단 한번도 나오지 않는 경우의 수인 $3^4 = 81$을 빼줘야 함을 알 수 있어. 그러므로 2)를 만족하는 경우의 수는 $256 - 81 = 175$.

3)을 보면, 전체 경우의 수에서 1과 4가 붙어있도록 배열하는 경우의 수를 제외해야 우리가 원하는 경우의 수를 구할 수 있음을 알 수 있어. 근데, 1과 4가 붙어있다는건 1이 적어도 한번 나온다는 것이니 2)를 만족한다는 것이겠지?
1과 4가 붙어있는 경우는 겹치는 경우의 수를 계산에서 제거하지 못할 위험이 크니 주의해야해.
일단, 네 숫자를 선택하여 나열했을 때 1과 4가 붙어있다는 건 1과 4를 뽑았다는 것이니, 나머지 두 수를 뽑는 경우의 수만 생각하면 되겠지? 이 경우의 수는 ${}_4H_2 = 10$이야. 이를 다음과 같이 나눠 생각해볼 수 있어.

i) 뽑은 두 수가 2와 3뿐인 경우

- 두 수를 뽑는 경우의 수는 3이고, 이를 배열하는 경우의 수는 $\dfrac{3!2!}{2!} \times 2 + 3!2! = 24$.

  → 계산하는 방법은 '숫자 1과 4'를 한 묶음으로 생각하고 배열하는 경우의 수를 구하는 경우의 수를 세는 방법이야.

ii) 뽑은 두 수가 1과 4뿐인 경우

- 두 수를 뽑는 경우의 수는 3이고, 이를 배열하는 경우의 수는 $\dfrac{4!}{3!} \times 2 + \dfrac{4!}{2!2!} = 14$

  → 이 경우, 어떤 식으로 배열되든 $1, 4$가 이웃므로 같은 것이 있는 순열을 세줘.

iii) 나머지

- 두 수를 뽑는 경우의 수는 4이고, 이를 배열하는 경우의 수는 $(3!2! - 2) \times 4 = 40$.

이때, $3!2!$ 에서 2 를 빼는 이유는, 1 과 4 가 떨어져 있는 경우의 수가 각 숫자 조합 별로 2 개씩 있기 때문이야. 이정도의 추론은 혼자 할 수 있도록 연습하자!

따라서, 구하고자 하는 경우의 수는 $175-(24+14+40)=97$.

TYPE 3 순서쌍의 개수

[2024학년도 9월 모의평가 확통 30번]

다음 조건을 만족시키는 13 이하의 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $a \le b \le c \le d$

(나) $a \times d$는 홀수이고, $b+c$는 짝수이다.

우리만의 실전 풀이

THINKING!

순서쌍의 개수가 요새 좀 각광받고 있는 느낌이 드는데, 전혀 다를게 없어.
여기에서 사용할 수 있는 테크닉적인 요소는 단 하나, 바로 '순서쌍의 원소를 다른 수로 치환'하는 것.
치환하는 이유는 모든 수를 '음이 아닌 정수'로 바꾸어 **중복조합(해가 음이 아닌 정수인 부정방정식)을 사용**하기 위해서야.

STEP 1 다시다시다시다시, 케이스 구분

(가)는 그냥 중복조합을 쓰기 위한 장치인듯하고.. (나)를 봐야할 것 같은데, 일단 $a\times d$가 홀수이니 a와 d가 모두 홀수여야하지 않을까? 또 $b+c$가 짝수이니 b, c가 모두 홀수이거나 모두 짝수여야하지 않을까?

일단은 '$1\le a\le b\le c\le d\le 13$'이라는 부등식을 적절히 활용하기 위해 다음과 같이 케이스 구분 후 치환해보자.

i) b, c가 모두 홀수인 경우

a, b, c, d가 모두 홀수이니 $a=2a'+1$, $b=2b'+1$, $c=2c'+1$, $d=2d'+1$이라고 치환하면 다음과 같은 부등식을 얻을 수 있어.

$$'0\le a'\le b'\le c'\le d'\le 6'$$

그러므로 위 부등식을 만족하는 순서쌍 (a', b', c', d')의 개수는 ${}_7\mathrm{H}_4={}_{10}\mathrm{C}_4=210$

ii) b, c가 모두 짝수인 경우

a, d는 홀수, b, c는 짝수이니 먼저 다음과 같은 부등식을 얻을 수 있어.

$$'1\le a<b\le c<d\le 13'$$

홀수와 짝수는 같을 수 없기때문에 등호를 떼어보았어. 하지만 이렇다면 어떨까?

$$'1\le a+1\le b\le c\le d-1\le 13'$$

홀수에 +1을 해주면 짝수가 되고, 마찬가지로 홀수에 -1을 해주면 짝수가 되니, 등호를 살리기 위해 이러한 조작을 취해줄 수 있겠지.

이때 $a=2a'+1$, $b=2b'+2$, $c=2c'+2$, $d=2d'+1$이라고 치환하면 다음과 같은 부등식을 얻을 수 있어.

'$0 \leq a' \leq b' \leq c' \leq d' \leq 5$'

그러므로 위 부등식을 만족하는 순서쌍 (a', b', c', d')의 개수는 ${}_6\mathrm{H}_4 = {}_9\mathrm{C}_4 = 126$

i), ii)에서, 우리가 구하고자 하는 경우의 수는 총 $210 + 126 = 336$임을 알 수 있어.

TYPE 4 상자

[2022학년도 9월 모의평가 확통 30번]

네 명의 학생 A, B, C, D에게 같은 종류의 사인펜 14개를 다음 규칙에 따라 남김 없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. [4점]

(가) 각 학생은 1개 이상의 사인펜을 받는다.
(나) 각 학생이 받는 사인펜의 개수는 9 이하이다.
(다) 적어도 한 학생은 짝수 개의 사인펜을 받는다.

우리만의 실전 풀이

THINKING!

상자 문항은 특히나 순서쌍 문항과 밀접한 관련이 있는 문항이야. 어떻게 연결하는지 한번 살펴볼까?

STEP 1 언제나, 케이스 구분.

문제 상황을 살펴보자. 각 학생이 1개 이상의 사인펜을 받되, 어떤 학생도 10개 이상의 사인펜을 받을 수 없고, 모든 학생이 홀수 개의 사인펜을 받을 수 없어. 일단, 학생 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}$가 받는 사인펜의 개수를 각각 a, b, c, d라 하면 다음과 같은 방정식을 구할 수 있겠지?

$$a+b+c+d=14\,,\ a'+b'+c'+d'=10$$
$$(\text{단, } 0 \le a', b', c', d' \le 8,\ a=a'+1, b=b'+1, c=c'+1, d=d'+1)$$

위 식은 (가)와 (나)를 반영한 결과야. 이제 (다)를 기준으로 케이스 구분해서 풀어버리면 끝이겠네?

(이렇게 보니 순서쌍의 개수를 구하는 문항이랑 똑같아도 너무 똑같네.. 핵심은 '부정방정식의 해의 개수'!)

STEP 2 홀수/짝수 조건

(다)를 기준으로 케이스를 구분하기 전에, 어떻게 효율적으로 케이스를 구할 수 있을지 생각해보자. '적어도~~'라는 발문이 보이면 뭘 하자 그랬지? 그래! '여사건'을 이용하자구.

네 학생이 받는 사인펜의 개수가 모두 홀수인 경우는 a', b', c', d'이 모두 짝수인 경우와 같으므로 $a'=2\alpha,\ b'=2\beta,\ c'=2\gamma,\ d'=2\delta$라 두면 다음과 같은 방정식을 세울 수 있겠지? (변수가 너무 많다고 어려워하지 마. 그저 치환 과정을 한번 더 겪었을 뿐~~!)

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=5\,,\ (0 \le \alpha, \beta, \gamma, \delta \le 4)$$

위 부정방정식을 만족시키는 해 $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$의 개수는 ${}_4\mathrm{H}_5$와 같아. 왜냐고? $\alpha, \beta, \gamma, \delta$가 적힌 상자에 공 5개를 **중복을 허용하여 넣었을 때, 각 상자에 들어 있는 공의 개수만큼 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$에 대입하는 경우의 수가 순서쌍 $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$를 결정하는 경우의 수와 같잖아.**

따라서 계산해보면 ${}_8\mathrm{C}_5=56$이고, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$가 각각 5인 경우를 빼주면 네 학생이 받는 사인펜의 개수가 모두 홀수인 경우의 수는 $56-4=52$임을 알 수 있어. 이때 주의! 우리가 구하고자 하는 경우의 수는 '네 학생이 받는 사인펜의 개수가 **모두 홀수가 아니도록 하는 경우의 수**'라는 것을 잊지 마. 이제 우리는 (가), (나)를

만족하는 전체 경우의 수를 찾아야해.

STEP 3 **전체 경우의 수를 찾아서**

$a'+b'+c'+d'=10\,(0\le a',\,b',\,c',\,d'\le 8)$을 만족하는 순서쌍 $(a',\,b',\,c',\,d')$의 개수가 전체 경우의 수이므로, 전체 경우의 수는 ${}_4\mathrm{H}_{10}$에서 $a',\,b',\,c',\,d'$가 각각 10 혹은 9이도록 하는 경우의 수 $(4+{}_3\mathrm{H}_1\times 4=16)$를 빼주면 되므로 이는 $286-16=270$임을 알 수 있어.

따라서, 궁극적으로 우리가 구하고자하는 전체 경우의 수는 $270-52=218$임을 알 수 있다!

교훈: 경우의 수는 케이스 구분만 잘 할 줄 알면 반 이상은 간다

STYLE 02

(조건부)확률, 그 근본적인 개념을 제대로 알아야지.

조건부확률($P(B|A)$)은 ‘이런 조건을 만족하는 사건(A) 중, 또다른 조건을 만족하는 사건의 비중(B)’을 의미해. 어라, (가)와 (나)를 만족하는 전체 경우의 수를 먼저 찾은 다음, (다)를 기준으로 케이스 구분하여 모든 경우의 수를 찾았던 지난 날이 생각나지 않니?
이번엔 그러면 (다)에서 **‘모든 경우의 수’를 찾는게 아니라 ‘특정 조건을 만족하는 경우의 수’만 찾으면 되는것 아닐까?**

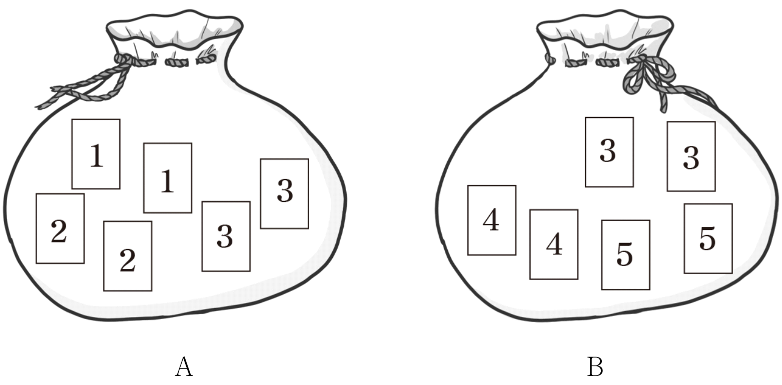
TYPE 1 이러면 이러고, 저러면 저러세요 - 주사위와 동전

[2022학년도 7월 학력평가 확통 27번]

주머니 A에는 숫자 1, 1, 2, 2, 3, 3이 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 들어 있고, 주머니 B에는 3, 3, 4, 4, 5, 5가 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 들어 있다. 두 주머니 A, B와 3개의 동전을 사용하여 다음 시행을 한다.

3개의 동전을 동시에 던져 앞면이 나오는 동전의 개수가 3이면 주머니 A에서 임의로 2장의 카드를 동시에 꺼내고, 앞면이 나오는 동전의 개수가 2 이하이면 주머니 B에서 임의로 2장의 카드를 동시에 꺼낸다.

이 시행을 한 번 하여 주머니에서 꺼낸 2장의 카드에 적혀 있는 두 수의 합이 소수일 확률은? [3점]



① $\frac{5}{24}$　② $\frac{7}{30}$　③ $\frac{31}{120}$　④ $\frac{17}{60}$　⑤ $\frac{37}{120}$

우리만의 실전 풀이

THINKING!

조건부확률 문항이든, 그냥 확률 문항이든, '전체 경우의 수에서 특정한 조건을 만족하는 애들의 비율'을 구한다는 점은 일맥상통! 역시 케이스를 구분해서 구하는 것이 능사 아닐까..

STEP 1 **여전히 케이스 구분이 아니겠느냐!**

앞면이 나오는 동전의 개수에 따라 문항에서 친절하게도 케이스 구분을 미리 해주고 있어. 이럴 땐 '감사~'하고 그대로 따라가주면 돼. 먼저 '앞면이 나오는 동전의 개수가 3'인 경우를 살펴보자.

i) 앞면이 나오는 동전의 개수가 3 인 경우

- 앞면이 나오는 동전의 개수가 3 이려면 두 동전 모두 나와야 하니 그 확률이 $\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$ 이겠지? 우리가 경우의 수에도 곱의 법칙이 성립하듯, 확률에도 곱의 법칙이 성립해. **'한 시행에서 동시에(한꺼번에) 일어나야 하는' 상황이라면, 확률을 곱해주면 된다!**
- 주머니 A 에서 두 장의 카드를 꺼낼 때, 두 수의 합이 소수이려면, '1 을 두 장', '$1, 2$ 각 한 장', '$2, 3$ 각 한 장'이 뽑혀야 하겠지? 6 장 중 2 장의 카드를 꺼내는 모든 경우의 수는 ${}_6C_2=15$ ('같은 숫자'가 여러개 들어있다고 해서 중복을 고려하지 않아. 상자에 99 개의 꽝이 있고 1 개의 당첨제비가 있을 때 **중복을 고려해서 당첨제비를 뽑을 확률이 $\frac{1}{2}$ 라고 하지 않는 것처럼...**), 1 을 두 장 꺼내는 경우의 수는 ${}_2C_2=1$, $1, 2$ 를 각각 한 장씩 꺼내는 경우의 수는 ${}_2C_1\times{}_2C_1=4$, $2, 3$ 을 각각 한 장씩 꺼내는 경우의 수는 ${}_2C_1\times{}_2C_1=4$ 이므로 두 수의 합이 소수일 확률은 $\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$ 임을 알 수 있어.
- 이때, 주머니 A 에서 카드를 꺼내는 것과, 동전을 던지는 것은 '한 시행'에서 일어나는 일이니, 두 확률을 곱해야 하겠지? 따라서 구하고자 하는 i)의 확률은 $\frac{1}{8}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{40}$ 임을 알 수 있어.

이제 자연스럽게 뭘 따져야겠어? 그렇지! 앞면이 나오는 동전의 개수가 2 이하인 경우를 따지면 되겠지.

ii) 앞면이 나오는 동전의 개수가 2 이하인 경우

- 앞면이 나오는 동전의 개수가 2 이하이려면 앞면이 나오는 동전의 개수가 3 만 아니면 되니 그 확률이 $1-\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{7}{8}$ 이겠지?
- 주머니 B 에서 두 장의 카드를 꺼낼 때, 두 수의 합이 소수이려면, '$3, 4$ 각 한 장'이 뽑혀야 하겠지? 6 장 중 2 장의 카드를 꺼내는 모든 경우의 수는 ${}_6C_2=15$, $3, 4$ 을 각각 한 장씩 꺼내는 경우의 수는 ${}_2C_1\times{}_2C_1=4$ 이므로 두 수의 합이 소수일 확률은 $\frac{4}{15}$ 임을 알 수 있어.

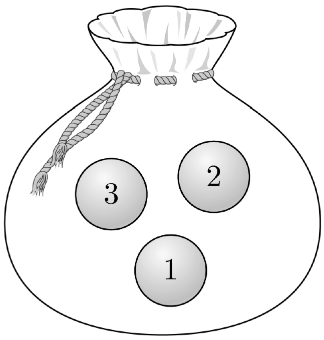
- 이때, 주머니 B에서 카드를 꺼내는 것과, 동전을 던지는 것은 '한 시행'에서 일어나는 일이니, 두 확률을 곱해야 하겠지? 따라서 구하고자 하는 ii)의 확률은 $\frac{7}{8}\times\frac{4}{15}=\frac{7}{30}$임을 알 수 있어.

따라서 문항에서 구하고자 하는 확률은 i)의 확률과 ii)의 확률을 더한(각 확률은 '한 시행에서 일어날 수 없으므로' 더하면 돼. 경우의 수 합/곱의 법칙이랑 똑같군.) 값인 $\frac{3}{40}+\frac{7}{30}=\frac{37}{120}$임을 알 수 있어.

TYPE 2 이러면 이러고, 저러면 저러세요 - 나머지(카드, 주머니 공, 등등...)

[2022학년도 6월 모의평가 확통 30번]

숫자 1, 2, 3이 하나씩 적혀 있는 3개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는 시행을 한다. 이 시행을 5번 반복하여 확인한 5개의 수의 곱이 6의 배수일 확률이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



우리만의 실전 풀이

THINKING!

이렇게, 주머니를 이용하는 경우 **'주머니에서 n개를 빼는 작업'을 '여러번'** 시행했을 때, 시행 결과가 어떤 특징을 가질 경우의 수(확률)를 구하도록 하는 문항인 상황이 매우 많아.

STEP 1 역시, 케이스 구분은 기본

숫자 $1, 2, 3$이 각각 적힌 주머니에서 공을 뽑고 다시 집어넣는 작업을 5번 반복하는 것은 **숫자 $1, 2, 3$ 중 중복을 허용하여 5번 뽑는 것**과 같아(전체 경우의 수는 $3^5 = 243$이겠지?). 또한, 숫자 $1, 2, 3$ 중 중복을 허용하여 5번 뽑았을 때 그 5개의 수의 곱이 6의 배수이기 위해서는 적어도 $2, 3$이 한번씩은 나와야 함을 알 수 있지? 오, '적어도~~'가 나오면 어떡해라? '여사건'을 생각해라. 따라서 이를 이용해 케이스를 구분하려면 어떡해야 할까?

i) 2가 한번도 안나오는 경우
→ $1, 3$만 나오는 경우는 $2^5 = 32$임을 알 수 있어.
ii) 3이 한번도 안나오는 경우
→ $1, 2$만 나오는 경우는 $2^5 = 32$임을 알 수 있어.
iii) $2, 3$이 모두 한번도 안나오는 경우
→ i)과 ii)에서 중복으로 카운팅되는 '1만 5번 나오는 경우' 하나(경우의 수가 $1^5 = 1$)를 빼주어야 해.

즉, 전체 경우의 수인 3^5에서 i), ii), iii)에 의한 경우의 수 $32 + 32 - 1 = 63$을 뺀 수(여사건)가 위 문항의 조건을 만족하는 경우의 수임을 알 수 있어. 따라서 우리가 구하고자 하는 확률은 $\dfrac{3^5 - 63}{3^5} = \dfrac{180}{243} = \dfrac{20}{27}$이므로 $p + q = 47$임을 알 수 있어.

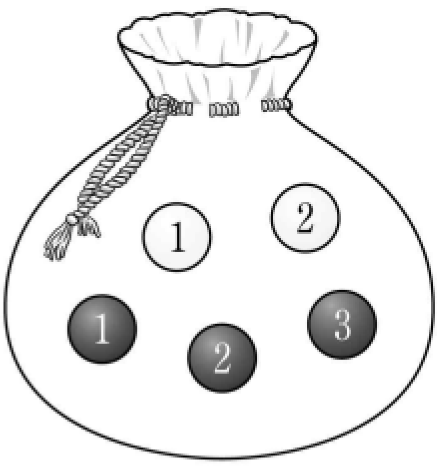
TYPE 3 조건부확률도 역시나.. 전체 경우의 수가 줄어들 뿐!

[2023학년도 10월 학력평가 확통 30번]

주머니에 숫자 $1, 2$가 하나씩 적혀 있는 흰 공 2개와 숫자 $1, 2, 3$이 하나씩 적혀 있는 검은 공 3개가 들어 있다. 이 주머니를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내어
> 꺼낸 공이 서로 같은 색이면 꺼낸 공 중 임의로 1개의 공을 주머니에 다시 넣고,
> 꺼낸 공이 서로 다른 색이면 꺼낸 공을 주머니에 다시 넣지 않는다.

이 시행을 한 번 한 후 주머니에 들어 있는 모든 공에 적힌 수의 합이 3의 배수일 때, 주머니에서 꺼낸 2개의 공이 서로 다른 색일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단 p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



우리만의 실전 풀이

THINKING!

조건부 확률은 ‘전체 경우의 수가 줄어드는’ 느낌으로 생각하면 돼. 주머니에서 두 개의 공을 꺼내는 전체 경우의 수가 아니라, **‘주머니에서 두 개의 공을 꺼내고 공을 주머니에 다시 넣거나 넣지 않은 다음, 모든 공에 적힌 수의 합이 3의 배수인 경우의 수’**가 전체 경우의 수인거야. 그 때 꺼낸 두 공이 서로 다른 색인 경우의 수까지 구해주면 우리가 원하는 조건부 확률을 구할 수 있겠지?

STEP 1 또또또 케이스 구분

먼저, 주머니에 들어 있는 모든 공에 적힌 수의 합이 3의 배수이도록 하는 확률(경우의 수)을 구해야 해.
그러기 위해 다음과 같이 케이스를 나눌 수 있겠지?

i) 꺼낸 공의 색이 같은 경우

- 꺼낸 공의 색이 모두 흰색일 확률은 $\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2}=\frac{1}{10}$이고, 꺼낸 공 중 어떤 공을 넣어도 주머니에 들어 있는 모든 공에 적힌 수의 합이 3의 배수가 될 수 없어.
- 꺼낸 공의 색이 모두 검은색일 확률은 $\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}=\frac{3}{10}$이고, 임의로 1개의 공을 다시 넣어야 하므로, 결론적으로 한 개의 공만 꺼낸다고 생각할 수 있지? $1, 2, 3$ 중 하나를 꺼냈을 때 주머니에 남아있는 모든 공에 적힌 수의 합이 3의 배수이려면 3을 꺼낼 수밖에 없다는걸 확인할 수 있어. 그렇기 때문에 $1, 3$과 $2, 3$ 이 적힌 공을 뽑아야만 해. 그런 다음 1과 2를 각각 주머니에 넣어야 하니, 이를 만족하는 확률은 $\frac{3}{10}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{10}$ 임을 알 수 있어.

ii) 꺼낸 공의 색이 다른 경우

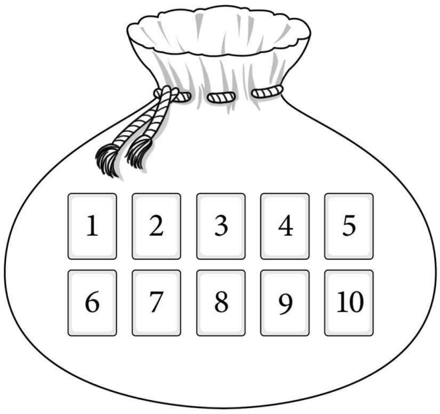
- 주머니에서 두 수를 꺼냈을 때 모든 공에 적힌 수의 합이 3의 배수이려면 $1, 2$를 각각 꺼내기만 하면 돼. 그 확률은 $\frac{2}{{}_5C_2}=\frac{1}{5}$ 임을 알 수 있어.

i), ii)에 따라, 전체 확률은 $\frac{1}{10}+\frac{1}{5}=\frac{3}{10}$ 이고, 그 중 꺼낸 공의 색이 다른 확률은 $\frac{1}{5}$ 이므로, 문항에서 요구하는 확률은 $\frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{10}}=\frac{2}{3}$ 이고, $p=2$, $q=3$이니 $p+q=5$.

★ STYLE02 부록 - 어차피 확률은 경우의 수 세기의 연장선

- 2022학년도 10월 학력평가 확통 27번 - 아까 봤던 순서쌍의 개수? / 주머니에서 꺼내기?

1부터 10까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 10장의 카드가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 카드 4장을 동시에 꺼내어 카드에 적혀 있는 수를 작은 수부터 크기 순서대로 a_1, a_2, a_3, a_4라 하자. $a_1 \times a_2$의 값이 홀수이고, $a_3 + a_4 \geq 16$일 확률은? [3점]



① $\frac{1}{14}$ ② $\frac{3}{35}$ ③ $\frac{1}{10}$ ④ $\frac{4}{35}$ ⑤ $\frac{9}{70}$

이 시행에서 있을 수 있는 모든 경우의 수는 ${}_{10}\mathrm{C}_4 = 210$ 이지? 그 중, 작은 두 수의 곱이 홀수, 큰 두 수의 합이 짝수여야 해. 사실, '주머니에서 뽑는다'는걸 낯설게 받아들이다보니 뭔가 진행하는 과정이 좀 달라야 할 것 같아서 망설이는 친구들이 있는데 절대 그렇지 않아. 그저 **'1 부터 10 까지 숫자 중에서 서로 다른 4 개를 골라 크기 순으로 나열한 것'** 뿐이거든.

$a_1 \times a_2$가 홀수이려면 a_1, a_2가 모두 홀수여야 해. 또, $a_3 + a_4 \geq 16$ 이려면 a_3이 적어도 6 보단 크거나 같아야 해. 둘 중 어느 것을 기준으로 하는 것이 더 편할까? 아무래도 케이스 구분이 쉬운 a_3를 기준으로 하는 것이 훨씬 편할거야. (개인차는 있겠지만 웬만하면 후자가 낫지 않을까...)

i) $a_3 = 6$ 인 경우

- a_4가 될 수 있는 경우의 수는 1, a_1, a_2를 정하는 경우의 수는 3 개의 홀수 중에서 2 개를 택하는 경우의 수와 같으므로 ${}_3\mathrm{C}_2 = 3$ 이야. 따라서 i)를 만족하는 경우의 수는 $1 \times 3 = 3$ 야.

ii) $a_3 = 7$ 인 경우

- a_4가 될 수 있는 경우의 수는 2, a_1, a_2 를 정하는 경우의 수는 3 개의 홀수 중에서 2 개를 택하는 경우의 수와 같으므로 ${}_3\mathrm{C}_2 = 3$ 이야. 따라서 ii)를 만족하는 경우의 수는 $2 \times 3 = 6$ 야.

iii) $a_3 = 8$ 인 경우

- a_4가 될 수 있는 경우의 수는 2, a_1, a_2 를 정하는 경우의 수는 4 개의 홀수 중에서 2 개를 택하는 경우의 수와 같으므로 ${}_4\mathrm{C}_2 = 6$ 이야. 따라서 iii)를 만족하는 경우의 수는 $2 \times 6 = 12$ 야.

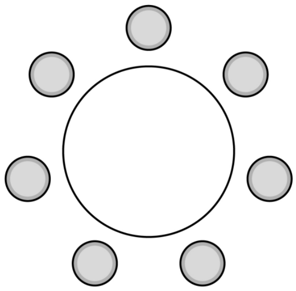
iv) $a_3 = 9$ 인 경우

- a_4가 될 수 있는 경우의 수는 1, a_1, a_2 를 정하는 경우의 수는 4 개의 홀수 중에서 2 개를 택하는 경우의 수와 같으므로 ${}_4\mathrm{C}_2 = 6$ 이야. 따라서 iii)를 만족하는 경우의 수는 $1 \times 6 = 6$ 야.

i) ~ iv)에서, 구하고자하는 확률은 $\dfrac{3+6+12+6}{210} = \dfrac{9}{70}$ 임을 알 수 있어.

- 2023학년도 9월 모의평가 확통 26번 - 아까 봤던 원순열?

세 학생 A, B, C를 포함한 7명의 학생이 원 모양의 탁자에 일정한 간격을 두고 임의로 모두 둘러앉을 때, A가 B 또는 C와 이웃하게 될 확률은? [3점]



① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{7}{10}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{9}{10}$

역시, 전체 경우의 수를 먼저 구해보자. 전체 경우의 수는 $(7-1)!=720$.

'A 가 B 아니면 C 와 이웃하도록 하는' 경우의 수를 세기 위해 케이스를 어떻게 나눠야 할까? 사실 얘는 좀 뻔하지? A, B 가 이웃할 때, A, C 가 이웃할 때, A, B 와 A, C 가 모두 이웃할 때로 나누면 되겠지?

i) A, B 가 이웃하는 경우의 수

- A, B 를 하나로 묶고, 나머지 5 명의 학생과 함께 나열한다고 생각한다면, 그 경우의 수는 $(6-1)!=120$ 이야. 이때, A, B 가 자리를 바꿀 수 있을테니 $2!$ 을 곱해줘야겠지? 따라서 i)를 만족하는 경우의 수는 $120 \times 2! = 240$

ii) A, C 가 이웃하는 경우의 수

- A, C 를 하나로 묶고, 나머지 5 명의 학생과 함께 나열한다고 생각한다면, 그 경우의 수는 $(6-1)!=120$ 이야. 이때, A, C 가 자리를 바꿀 수 있을테니 $2!$ 을 곱해줘야겠지? 따라서 ii)를 만족하는 경우의 수는 $120 \times 2! = 240$

iii) A, B 와 A, C 가 모두 이웃하는 경우의 수

- i)와 ii)에는 iii)의 경우가 모두 들어가있기 때문에 위 문항의 조건을 만족하는 경우의 수를 구하기 위해서는 i)와 ii)의 경우의 수를 더한 다음, iii)의 경우의 수를 빼줘야해.
  iii)의 경우는 A 가 B, C 사이에 있도록 하여 하나로 묶고, 나머지 4 명의 학생과 함께 나열한다고 생각한다면, 그 경우의 수가 $(5-1)!=24$ 임을 알 수 있지? 근데 B, C 는 서로 자리를 바꿀 수 있으니 $2!$ 을 곱해줘야해. 따라서 iii)를 만족하는 경우의 수는 $24 \times 2! = 48$

i) ~ iii)에 의해 문항의 조건을 만족하는 경우의 수는 $240+240-48=432$ 이고, 따라서 구하고자 하는 확률은 $\frac{432}{720}=\frac{18}{30}=\frac{3}{5}$

- 2021학년도 6월 모의평가 가형 17번 - 아까 봤던 나열?

숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7이 하나씩 적혀 있는 7장의 카드가 있다. 이 7장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 임의로 나열할 때, 다음 조건을 만족시킬 확률은? [4점]

(가) 4가 적혀 있는 카드의 바로 양옆에는 각각 4보다 큰 수가 적혀 있는 카드가 있다.
(나) 5가 적혀 있는 카드의 바로 양옆에는 각각 5보다 작은 수가 적혀 있는 카드가 있다.

① $\frac{1}{28}$ ② $\frac{1}{14}$ ③ $\frac{3}{28}$ ④ $\frac{1}{7}$ ⑤ $\frac{5}{28}$

이 문제는 (가)와 (나)가 모두 케이스 구분하기가 그렇게 깔끔하지는 않은 문제야. 하지만 (나)의 경우 5보다 작은 수가 4개나 돼서 좀 따질게 많지만, (가)의 경우 4보다 큰 수가 3개이니 그나마 좀 따질게 적지 않을까? 그러니 (가)를 기준으로 생각해보자. 전체 경우의 수는 너무 당연하게도, $7!=5040$.

i) 4가 적힌 카드 양옆에 $5, 6$이 오는 경우

- $4, 5, 6$을 한 묶음으로 보고, 나머지 네 수를 만저 나열한 다음 이 한 묶음을 네 수 사이사이에 끼어넣는다고 생각할 수 있겠지? 왜냐하면, (다)에 의해 5가 양 끝에 위치할 수 없거든.
  만약 5가 4의 왼쪽에 있다면 네 수를 나열하고 이 묶음을 끼어넣는 경우의 수는 $4!\times4=96$이야.
  5가 4의 오른쪽에 있다면 역시 그 경우의 수도 $4!\times4=96$이야.
- 근데, 5 옆에 바로 7이 온다면 어떻게 될까? 그러면 (다)에 위배될거야. 그러니 5 옆에 바로 7을 붙여 네 수를 한 묶음으로 보자. 이때는 이 묶음이 양 끝에 위치해도 괜찮으니 나열하는 경우의 수는 $4!$, 이때 5는 4의 오른쪽에 올 수도, 왼쪽에 올 수도 있으므로 경우의 수에 2를 한번 곱해줘야겠지? 따라서 이 경우의 수는 $4!\times2=48$이야.
- 그러므로, i)를 만족하는 모든 경우의 수는 $96+96-48=144$이겠네.

ii) 4가 적힌 카드 양옆에 $5, 7$이 오는 경우

- i)와 똑같은 시행을 해주면 돼. ii)를 만족하는 모든 경우의 수는 역시 144야.

iii) 4가 적힌 카드 양옆에 $6, 7$이 오는 경우

- $4, 6, 7$을 한 묶음으로 보자. 이 묶음과 4개의 수를 나열할 때, 이 묶음이 양 끝에 있다면 숫자 5는 이 묶음과 붙어있어선 안돼. 또, 6과 7은 자리를 바꿀 수 있으므로 이를 만족하는 경우의 수는 $2\times2!\times2\times3!=48$
- 이 묶음이 양 끝이 아닌 곳에 있다면 역시 숫자 5는 이 묶음과 붙어있어선 안된다. 역시 6과 7은 자리를 바꿀 수 있으므로 이를 만족하는 경우의 수는 $1\times2!\times2\times3!=24$
- 그러므로, iii)를 만족하는 모든 경우의 수는 $48+24=72$이겠네.

따라서 문제에서 구하고자 하는 확률은 $\dfrac{360}{5040}=\dfrac{15}{210}=\dfrac{1}{14}$

- 2021학년도 6월 모의평가 가형 19번 - 아까 봤던 함수?

두 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 A에서 B로의 모든 함수 f 중에서 임의로 하나를 선택할 때, 이 함수가 다음 조건을 만족시킬 확률은? [4점]

> $f(1)\geq 2$이거나 함수 f의 치역은 B이다.

① $\frac{16}{27}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{20}{27}$ ④ $\frac{22}{27}$ ⑤ $\frac{8}{9}$

얘는 다행히도 케이스 구분하기가 좀 쉽다. $f(1) \geq 2$인 확률과 f의 치역이 B인 확률을 구한 다음, 두 조건을 동시에 만족하는 확률을 빼주면 되겠지?

i) $f(1) \geq 2$인 확률

- 모든 함수의 개수가 $3^4 = 81$이고, $f(1) \geq 2$이도록 하는 f의 개수는 $2 \times 3^3 = 54$이므로 i)를 만족할 확률은 $\frac{2}{3}$.

ii) f의 치역이 B인 확률

- 모든 함수의 개수가 $3^4 = 81$이고, 치역의 원소의 개수가 1이도록 하는 함수의 개수는 3, 2이도록 하는 함수의 개수는 $3 \times (2^4 - 2) = 42$이야. 따라서 ii)를 만족할 확률은 $\frac{81-45}{81} = \frac{36}{81} = \frac{4}{9}$.

iii) i)와 ii)를 동시에 만족할 확률

- $f(1) = 2$일 때, $f(2), f(3), f(4)$ 중 1 혹은 3인 수가 둘 다 존재해야해. 세 수가 모두 2인 경우의 수는 1, 세 수가 $1, 2$ 혹은 $2, 3$뿐인 경우의 수는 $2 \times (2^3 - 1) = 14$이니 전체 경우의 수인 $3^3 = 27$에서 15를 뺀 12가 $f(1) = 2$일 때 iii)을 만족하는 경우의 수야.
- $f(1) = 3$일 때 역시 마찬가지로 생각하면 경우의 수는 12임을 알 수 있어.
- 따라서 iii)을 만족할 확률은 $\frac{24}{81} = \frac{8}{27}$.

i) ~ iii)에 의해 문제에서 구하고자 하는 확률은 $\frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{8}{27} = \frac{22}{27}$

- 2023학년도 수능 확통 29번 - 아까 봤던 카드 나열?

앞면에는 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있고 뒷면에는 모두 0이 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 있다. 이 6장의 카드가 그림과 같이 6 이하의 자연수 k에 대하여 k번째 자리에 자연수 k가 보이도록 놓여 있다.

이 6장의 카드와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 k이면
> k번째 자리에 놓여 있는 카드를 한 번 뒤집어 제자리에 놓는다.

위의 시행을 3번 반복한 후 6장의 카드에 보이는 모든 수의 합이 짝수일 때, 주사위의 1의 눈이 한 번만 나왔을 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

케이스를 어떻게 구분할 수 있을까? '어떤 수를 뒤집었느냐' 보다는, '몇 종류의 수를 뒤집었느냐'를 따지는게 좋을 것 같아. 가령, 주사위를 굴렸을 때 '5 두번, 2 한번' 나온 경우 총 두 종류의 수를 뒤집었을 것이며, 앞면에 5가 적힌 카드는 5가 보이겠지만, 앞면에 2가 적힌 카드는 0이 보이겠지?

i) 한 종류의 수를 세 번 뒤집은 경우

- 한 종류의 수를 세 번 뒤집으면 그 수가 적힌 카드는 뒷면이 보일 것이며, 따라서 6장의 카드에 보이는 모든 수의 합은 $1+2+3+4+5+6=21$에서 그 수를 뺀 수가 될거야. 즉, 그 수는 '홀수'여야 하겠지?
- 따라서, 주사위를 던져 나온 눈의 수가 세번 연속으로 $1, 3, 5$여야 해. 그럴 확률은 $3\times\frac{1}{6^3}=\frac{1}{72}$야.

ii) 한 종류의 수를 두 번, 다른 한 종류의 수를 한 번 뒤집은 경우

- 한 종류의 수를 두 번 뒤집으면 그 수가 적힌 카드는 앞면이 보일 것이며, 한 번 뒤집으면 그 수가 적힌 카드는 뒷면이 보이므로 0이 보일거야. 따라서 6장의 카드에 보이는 모든 수의 합은 21에서 한 번 뒤집은 카드의 앞면에 있는 수를 뺀 수가 될거야. 즉, 한 번 뒤집은 카드의 앞면에 있는 수가 '홀수'여야 하겠지?
- 따라서, 주사위를 던져 나온 눈의 수의 종류는 2, 한 번 나온 눈의 수는 무조건 홀수여야 해. 그럴 확률은 $\dfrac{({}_6C_2-{}_3C_2+{}_3C_2)\times\frac{3!}{2!}}{6^3}=\frac{15}{72}=\frac{5}{24}$임을 알 수 있어. 두 수가 모두 짝수가 나오는 경우의 수를 제거하기 위해 ${}_6C_2$에서 ${}_3C_2$를 빼줬고, 또, 두 수가 모두 홀수가 나오는 경우, 두 번 뒤집은 수와 한 번 뒤집은 수를 바꿔 생각해도 괜찮으므로 ${}_3C_2$를 더해줬어. 또, 주사위의 눈의 수가 나온 순서를 고려하기 위해 같은 것이 있는 순열을 사용했어.

iii) 세 종류의 수를 한 번씩 뒤집은 경우

- 세 수의 합이 홀수이면 3번의 시행 후 그 세 수가 앞면에 적힌 카드는 뒷면이 보일 것이므로 6장의 카드에 보이는 모든 수의 합이 짝수임을 알 수 있어. 세 수의 합이 홀수이려면 홀수 하나와 짝수 두개를 더하거나, 홀수 세 개를 더하면 되므로 이 확률은 $\dfrac{1\times3!+{}_3C_1\times{}_3C_2\times3!}{6^3}=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$임을 알 수 있어.

i) ~ ii)에 의해 전체 확률은 $\frac{36}{72}=\frac{1}{2}$임을 알 수 있어.

이때, 주사위의 1의 눈이 한 번만 나오려면 ii)의 경우 혹은 iii)의 경우여야 하겠지? ii)의 경우일 때, 두 번 나온 눈의 수를 선택하는 경우의 수가 5임을 이용해 그 확률이 $\dfrac{5\times\frac{3!}{2!}}{6^3}=\frac{15}{216}$임을 알 수 있어. 또, iii)의 경우일 때 짝수 두개를 택하거나 나머지 홀수 두개를 택하면 되므로 그 확률이 $\dfrac{1\times3!+{}_3C_2\times3!}{6^3}=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

임을 알 수 있어. 따라서 주사위의 1 의 눈이 한 번만 나올 확률은 $\frac{13}{72}$ 야.

그러므로, 문항에서 구하고자 하는 확률은 $\dfrac{\frac{13}{72}}{\frac{1}{2}} = \frac{13}{36}$ 이니, $p+q=49$ 임을 알 수 있어.

- 2022학년도 수능 확통 30번 - 주머니 공과 주사위의 합작

흰 공과 검은 공이 각각 10개 이상 들어 있는 바구니와 비어 있는 주머니가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 5 이상이면
> 바구니에 있는 흰 공 2개를 주머니에 넣고,
> 나온 눈의 수가 4 이하이면
> 바구니에 있는 검은 공 1개를 주머니에 넣는다.

위의 시행을 5번 반복할 때, n $(1 \leq n \leq 5)$번째 시행 후 주머니에 들어 있는 흰 공과 검은 공의 개수를 각각 a_n, b_n이라 하자. $a_5 + b_5 \geq 7$일 때, $a_k = b_k$인 자연수 k $(1 \leq k \leq 5)$가 존재할 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, q와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

먼저, 우리가 보고자 하는 전체 경우의 수는 '$a_5 + b_5 \geq 7$'이도록 하는 경우의 수야. 주사위를 한 번 던져 5 이상의 눈이 나오면 흰 공을 두 개 넣고, 4 이하의 눈이 나오면 검은 공을 한 개 넣으니, 검은 공 보다는 흰 공을 많이 넣어야 $a_5 + b_5$가 커지겠지?

i) 시행을 5번 반복할 때, 검은 공을 세 번, 흰 공을 두 번 넣은 경우 ($b_5 = 3$, $a_5 = 4$)

- 흰 공을 넣을 확률은 $\frac{1}{3}$, 검은 공을 넣을 확률은 $\frac{2}{3}$이고, 총 5번 시행하는데 검은 공을 넣는 순서를 따져야 하므로 같은 것이 있는 순열을 적용해 그 확률을 구하면 $\left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \frac{5!}{2!3!} = \frac{80}{243}$
- 이때, $a_n = b_n$이려면 $a_n = b_n = 2$여야 하므로 $n = 3$이다. 즉, 초기 시행 3번에서 검은 공을 두 번, 흰 공을 한 번 넣어야 하므로 그 확률은 역시 같은 것이 있는 순열을 이용해 $\left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \frac{3!}{2!} \times 2! = \frac{16}{81}$ 임을 알 수 있어.

ii) 검은 공을 두 번, 흰 공을 세 번 넣은 경우 ($b_5 = 2$, $a_5 = 6$)

- 흰 공을 넣을 확률은 $\frac{1}{3}$, 검은 공을 넣을 확률은 $\frac{2}{3}$이고, 총 5번 시행하는데 검은 공을 넣는 순서를 따져야 하므로 같은 것이 있는 순열을 적용해 그 확률을 구하면 $\left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{5!}{3!2!} = \frac{40}{243}$
- 이때, $a_n = b_n$이려면 $a_n = b_n = 2$여야 하므로 $n = 3$이다. 즉, 초기 시행 3번에서 검은 공을 두 번, 흰 공을 한 번 넣어야 하므로 그 확률은 역시 같은 것이 있는 순열을 이용해 $\left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{3!}{2!} = \frac{4}{81}$ 임을 알 수 있어.

iii) 검은 공을 한 번, 흰 공을 네 번 넣은 경우 ($b_5 = 1$, $a_5 = 8$)

- 흰 공을 넣을 확률은 $\frac{1}{3}$, 검은 공을 넣을 확률은 $\frac{2}{3}$이고, 총 5번 시행하는데 검은 공을 넣는 순서를 따져야 하므로 같은 것이 있는 순열을 적용해 그 확률을 구하면 $\left(\frac{1}{3}\right)^4 \times \left(\frac{2}{3}\right) \times \frac{5!}{4!} = \frac{10}{243}$

iv) 흰 공만 다섯번 넣은 경우 ($b_5 = 0$, $a_5 = 10$)

- 흰 공을 넣을 확률은 $\frac{1}{3}$이고, 이것이 5번 연속으로 이루어져야 하므로 그 확률은 $\left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{243}$.

iii)과 iv)의 경우 $a_n = b_n$을 만족하는 1 이상 5 이하의 자연수 n이 존재하지 않으므로 i) ~ iv)에 의해, 문

제에서 요구하는 확률은 $\dfrac{\frac{20}{81}}{\frac{131}{243}} = \dfrac{60}{131}$ 이고, 따라서 $p+q=191$ 임을 알 수 있어.

- 2023학년도 6월 모의평가 확통 30번 - 주머니 공과 순서쌍의 합작

주머니에 1부터 12까지의 자연수가 각각 하나씩 적혀 있는 12개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 작은 수부터 크기 순서대로 a, b, c라 하자. $b-a \geq 5$일 때, $c-a \geq 10$일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

우리 앞에서 경우의 수 세었을 때처럼 그대로. a, b, c를 경계로 a, b, c를 제외한 나머지 9개의 숫자를 사이사이에 배열한다고 할 때, 전체 경우의 수를 구하기 위해선 a와 b 사이엔 4개 이상의 수가 있다는 조건을 걸어두면 돼. 또, 특정 조건($c-a \geq 10$)을 만족하는 경우의 수를 구하기 위해선 a와 b 사이에 있는 수와, b와 c 사이에 있는 수의 합이 8 이상이면 되겠지.

i) a와 b 사이에 4개 이상의 수가 있도록 하는 경우의 수 ($b-a \geq 5$)

- a보다 작은 수의 개수를 x, a 보다 크고 b 보다 작은 수의 개수를 y, b 보다 크고 c 보다 작은 수의 개수를 z, c 보다 큰 수의 개수를 w라 하면, $x+y+z+w=9$이면서 $y \geq 4$이면 된다.
- $y=y'+4$라 할 때, $x+y'+z+w=5$이므로 이 방정식을 만족하는 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는 ${}_4\mathrm{H}_5 = {}_8\mathrm{C}_5 = 56$임을 알 수 있어.

ii) i)을 만족하면서, 동시에 a와 c 사이에 8개 이상의 수가 있도록 하는 경우의 수 ($c-a \geq 10$)

- $y \geq 4$이므로 $c-a$가 10인 경우와 11인 경우로 나눠 생각해보면 되겠다.
- $c-a=11$이면 $a=1$, $c=12$이므로 b가 될 수 있는 경우의 수는 6이야.
- $c-a=10$이면 $a=1, c=11$이거나 $a=2, c=12$이므로 b가 될 수 있는 경우의 수는 각각 5야. 따라서 모든 경우의 수는 10이야.
- 위에 따라 ii)의 경우의 수는 $10+6=16$이야.

따라서, 문항에서 구하고자 하는 확률은 $\dfrac{16}{56}=\dfrac{2}{7}$이므로, $p+q=9$임을 알 수 있어.

STYLE 03

확률분포, 그 의미를 제대로 알고 있어야지. 어차피 나머지는 앞에거 재탕!

확률분포 문항은 역시 케이스 구분을 통해 확률변수의 평균, 분산 등을 구하도록 하는 문항이 있기도 하고, 아예 확률변수의 특징을 이용해 계산하도록 하는 문항이 있기도 해. 전자의 경우도 많이 출제되기 때문에 결론은 뭐다? **1단원을 잘 해야한다~**

[2020학년도 수능 가형 14번 / 나형 16번 변형]

숫자 1이 적혀 있는 공 10개, 숫자 2가 적혀 있는 공 20개, 숫자 3이 적혀 있는 공 30개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는다. 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼낼 때, 이 공에 적혀 있는 수를 확률변수 X라 하고, 이와 같은 시행을 10번 반복하여 확인한 10개의 수의 합을 확률변수 Y라 하자. $36\times \mathrm{V}(\overline{Y})$의 값을 구하시오.

우리만의 실전 풀이

THINKING!

확률변수를 준 다음, 표본평균, 분산 등을 구하도록 하는 문항에도 여전히 케이스 구분은 필요해. 대신, **확률분포표를 그려서** 표본평균, 분산 등에 대한 정보를 찾아내는 과정이 그 과정 속에 녹아들 뿐...

STEP 1 **역시나 케이스 구분**

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1

임을 문항의 조건을 통해 알 수 있지? 이때, $Y=10\overline{X}$이니까, $\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(10\overline{X})$임을 알 수 있어.

이때, 표본의 개수가 10이니까 $\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{\mathrm{V}(X)}{10}$임을 알 수 있지?

또, $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$이므로 $\mathrm{E}(X)$와 $\mathrm{E}(X^2)$를 구하면 답을 구할 수 있겠다.

$\mathrm{E}(X)=\dfrac{1}{6}+\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{1+4+9}{6}=\dfrac{7}{3}$이고, $\mathrm{E}(X^2)=\dfrac{1}{6}+\dfrac{4}{3}+\dfrac{9}{2}=\dfrac{1+8+27}{6}=6$이니

$\mathrm{V}(X)=36-\dfrac{49}{9}=\dfrac{324-49}{9}=\dfrac{275}{9}$야. 그러니 $\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{275}{90}=\dfrac{55}{18}$임을 알 수 있어. 따라서 구하고자 하는 값은 $36\times\dfrac{55}{18}=110$.

★ STYLE03 부록 - 가끔 계산력을 요하는 확률분포 문항이 나오기도

- 2022학년도 9월 모의평가 확통 29번

두 이산확률변수 X, Y의 확률분포를 표로 나타내면 각각 다음과 같다.

X	1	3	5	7	9	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	b	c	b	a	1

Y	1	3	5	7	9	합계
$\mathrm{P}(Y=y)$	$a+\frac{1}{20}$	b	$c-\frac{1}{10}$	b	$a+\frac{1}{20}$	1

$\mathrm{V}(X)=\frac{31}{5}$ 일 때, $10\times\mathrm{V}(Y)$의 값을 구하시오. [4점]

$V(X)$값만 달랑 주고 아무것도 없어서 좀 그렇지? 근데 우리는 $V(X)$값을 알면
$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$라는 것을 이용해 $E(X^2)-\{E(X)\}^2$에 대한 정보를 알아낼 수 있어.

이때, 우리는 $E(X^2)$와 $E(X)$의 값을 모두 구할 수 있어.
$E(X)=a+3b+5c+7b+9a=10a+10b+5c$인데, $2a+2b+c=1$이니 $E(X)=5$이겠지?
또, $E(X^2)=a+9b+25c+49b+81a=82a+58b+25c$라서, $32a+8b+25$로 정리할 수 있어.
이때 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=32a+8b=\dfrac{31}{5}$임을 알 수 있어.
일단은 a, b, c에 대한 식이 둘밖에 안나와서 a, b, c를 모두 구할 수는 없지만 $V(Y)$를 나타내어보자.

$$E(Y)=a+3b+5c+7b+9a+\frac{1}{20}-\frac{1}{2}+\frac{9}{20}=5$$
$$E(Y^2)=a+9b+25c+49b+81a+\frac{1}{20}-\frac{5}{2}+\frac{81}{20}=E(X^2)+\frac{8}{5}$$

이므로, $V(Y)=E(X^2)-\dfrac{117}{5}=25+\dfrac{31}{5}-\dfrac{117}{5}=\dfrac{39}{5}$임을 알 수 있어. 그래서 우리가 구하고자 하는 정답은 $10\times\dfrac{39}{5}=78$이야.

사실, 위에서 본 것처럼 식이 더러우면 더러울수록 a, b, c에 대해 모두 나열하는 것보다, 원형($E(X^2)$ 등..) 그대로 놔두는 것이 훨씬 계산하기 간편할 수 있어. 혹시나 하는 가능성을 위해 a, b, c를 모두 나열해봤지만, **미지수가 3개 이상인 상황에서 그 방정식을 연립해서 문항을 풀어야 하도록 수능에 출제될 가능성은 거의 0에 가깝다고 봐도 무방해!**

STYLE 04

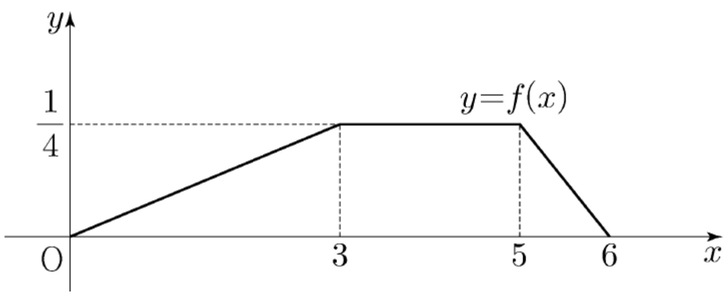
연속확률변수의 확률밀도함수

확률밀도함수 문항은 이 하나 말고는 쓰이는 게 없어.

"x 축과 둘러싸인 부분의 넓이가 1 이다."

[2022학년도 수능 확통 29번]

두 연속확률변수 X와 Y가 갖는 값의 범위는 $0 \leq X \leq 6$, $0 \leq Y \leq 6$이고, X와 Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x)$, $g(x)$이다. 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$0 \leq x \leq 6$인 모든 x에 대하여

$$f(x)+g(x)=k \ (k\text{는 상수})$$

를 만족시킬 때, $\mathrm{P}(6k \leq Y \leq 15k)=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

우리만의 실전 풀이

THINKING!

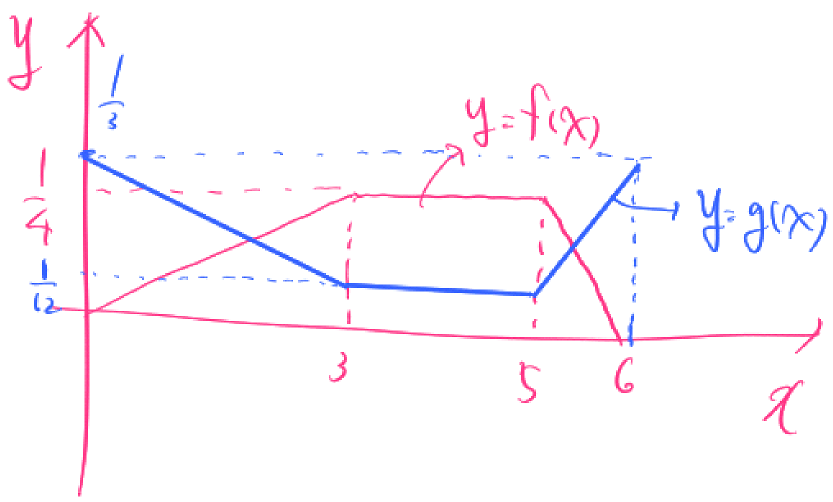
$f(x)$도, $g(x)$도 모두 확률밀도함수이기에, 두 함수의 그래프와 x축이 이루는 도형의 넓이는 1이야. 둘이 더하면 어떻게 될까? 당연히 그 그래프와 x축이 이루는 도형의 넓이는 2이지 않을까?...

STEP 1 k를 구하자!(STEP1이 드디어 케이스 구분이 아니다.)

정의역이 0부터 6까지이고, 함수 $y=f(x)+g(x)$의 함숫값이 계속 k라면, 함수 $y=f(x)+g(x)$와 x축, 직선 $x=0$, $x=6$이 이루는 넓이가 2라는 것을 이용해 $6k=2$, $k=\frac{1}{3}$임을 알 수 있어. 그렇다면 $\mathrm{P}(6k \le Y \le 15k)$를 구하기 위해 두가지 방법을 쓸 수 있는데, 하나는 $g(x)$를 직접 그리거나, 하나는 $y=f(x)+g(x)$에 의해 만들어진 직사각형에서 $y=f(x)$와 x축, 직선 $x=6k$, $x=15k$가 이루는 넓이를 빼는 방법이야.

i) $y=g(x)$ 직접 그리기

- $y=g(x)$를 직접 그려보면 다음과 같이 그려져.



두 함숫값의 합이 $\frac{1}{3}$임을 이용한거야. 위 함수 $y=g(x)$의 그래프와, 직선 $x=2$, $x=5$, x축이 이루는 도형의 넓이가 $\mathrm{P}(6k \le Y \le 15k)=\mathrm{P}(2 \le Y \le 5)$이니, 구하고자 하는 값은

$\frac{1}{12}\times 2+\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{6}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}+\frac{1}{8}=\frac{7}{24}$이고, 따라서 $p=7$, $q=24$, $p+q=31$임을 알 수 있어.

ii) 직사각형에서 $f(x)$ 빼기

- $y=f(x)$와 x축, 직선 $x=6k$, $x=15k$가 이루는 넓이는 $3\times\frac{1}{3}=1$임을 알 수 있고.

  $\mathrm{P}(2\le X\le 5)=\frac{1}{2}+\frac{5}{24}=\frac{17}{24}$이므로 $\mathrm{P}(2\le Y\le 5)=1-\frac{17}{24}=\frac{7}{24}$이야. 그러면 역시 $p+q=31$ 이겠지?

STYLE 05

정규분포그래프의 개형 추론 - 너무도 쉬운 대칭성

정규분포를 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수는 $x=m$ (**m은 X의 평균)을 중심으로 대칭이며,** σ (**σ는 X의 표준편차)가 클수록 높이가 낮고 넓게 퍼져있는 경향성**을 띄어.

[2022학년도 10월 학력평가 확통 28번]

정규분포를 따르는 두 확률변수 X, Y의 확률밀도함수를 각각 $f(x)$, $g(x)$라 할 때, 모든 실수 x에 대하여

$$g(x)=f(x+6)$$

이다. 두 확률변수 X, Y와 상수 k가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\mathrm{P}(\mathrm{X} \leq 11)=\mathrm{P}(\mathrm{Y} \geq 23)$
(나) $\mathrm{P}(\mathrm{X} \leq \mathrm{k})+\mathrm{P}(\mathrm{Y} \leq \mathrm{k})=1$

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 $\mathrm{P}(X \leq k)+\mathrm{P}(Y \geq k)$의 값이 0.1336 일 때, $\mathrm{E}(\mathrm{X})+\sigma(\mathrm{Y})$의 값은? [4점]

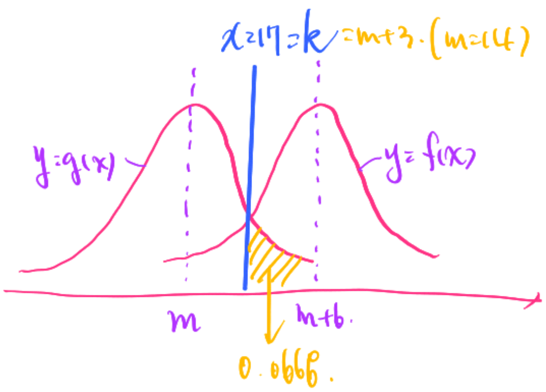
① $\frac{41}{2}$ ② 21 ③ $\frac{43}{2}$ ④ 22 ⑤ $\frac{45}{2}$

우리만의 실전 풀이

THINKING!

$g(x)=f(x+6)$ 이라고 하니 $f(x)$를 평행이동 시킨 꼴로 $g(x)$가 생기겠네. 더불어 X, Y의 표준편차가 같다는 것도 알 수 있겠고...

STEP 1 정규분포그래프의 특징



$$\to P(Y \ge 17)$$

$$= P\left(\frac{Y-m}{\sigma} \ge \frac{17-m}{\sigma}\right) = P(Z \ge 1.5).$$

$$\to \sigma = 2.$$

$$\therefore \sigma(Y)+E(X) = 20+2 = \boxed{22}$$

위 그래프처럼, (가)를 만족하기 위해선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 $x=17$에서 만날 수밖에 없으며, $17=m+3$ 이므로 $m=14$ 라는 것을, **정규분포그래프의 대칭성을** 통해 보일 수 있어.

또, $\mathrm{P}(X \le k)+\mathrm{P}(Y \ge k)=0.1336$ 이고, 대칭성에 의해 $\mathrm{P}(X \le k)=\mathrm{P}(Y \ge k)=0.0668$ 이므로 $\mathrm{P}(Y \ge 17)=\mathrm{P}\left(\frac{Y-14}{\sigma} \ge \frac{3}{\sigma}=1.5\right)$야. 즉, $\sigma=2$라는 것을 이 식을 통해 알 수 있는거지. 따라서 우리가 구하고자 하는 값은 $14+6+2=22$야. 14는 Y의 평균이니까, X의 평균을 구하기 위해선 14에 6을 더해줘야해. 이런 **사소한 실수가 큰 점수를 잃게 만드니** 조심!!!

★ STYLE05 부록 - 정규분포를 따르는 확률변수의 신뢰구간

- 2023학년도 수능 확통 27번

어느 회사에서 생산하는 샴푸 1개의 용량은 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 다른다고 한다. 이 회사에서 생산하는 샴푸 중에서 16개를 임의추출하여 얻은 표본평균을 이용하여 구한 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $746.1 \le m \le 755.9$이다. 이 회사에서 생산하는 샴푸 중에서 n개를 임의추출하여 얻은 표본평균을 이용하여 구하는 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간이 $a \le m \le b$일 때, $b-a$의 값이 6 이하가 되기 위한 자연수 n의 최솟값은? (단, 용량의 단위는 ㎖이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96) = 0.95$, $\mathrm{P}(|Z| \le 2.58) = 0.99$로 계산한다. [3점]

① 70　　② 74　　③ 78　　④ 82　　⑤ 86

신뢰구간의 평균은 '표본평균'이지, '모평균'이 아니라는 것을 무조건 명심해야 해. 즉, 751은 모평균이 아닌, 표본평균이야. 그러니 a, b를 구할 때 $a=751-(\quad)$, $b=751+(\quad)$라고 구한 친구들은 슬프지만 올바르게 구하지 못한거야 ,, 이 문제만으로 a, b의 특정한 값은 구할 수 없어.

모집단에서 n개의 표본을 추출했을 때, 표본평균을 $\overline{x}$라 하면 모평균 m에 대한 95% 신뢰구간은 다음과 같아.

$$\overline{x}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\times 1.96 \le m \le \overline{x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\times 1.96$$

99% 신뢰구간은? 1.96을 2.58로만 바꿔주면 돼. 식을 해석하면 대강 이런 느낌이야.

표본이 늘어날수록 정확성은 높아진다. 근데, 표본의 편차가 크면 정확성은 떨어지겠지? 그러므로 신뢰도가 같을때 **표본이 적고, 편차가 클수록 더 넓게 신뢰구간을 잡아야**, 표본조사를 거듭해가며 신뢰구간 여러 개를 정했을 때 모평균이 신뢰구간 안에 포함되는 비율이 95% (99%)에 육박해질 정도로 커지지 않을까?

그래서, 문제로 다시 돌아가면, 16개의 표본을 추출했을 때의 신뢰구간은

$751-\frac{\sigma}{4}\times 1.96 \le m \le 751+\frac{\sigma}{4}\times 1.96$이므로 $\sigma=10$임을 알 수 있어.

따라서, n개의 표본을 추출 할 때, $b-a=\frac{20}{\sqrt{n}}\times 2.58$이고, 이것이 6 이하여야 하므로 $\sqrt{n}\ge\frac{20\times 2.58}{6}=\frac{51.6}{6}=8.6$임을 알 수 있어. 따라서 $n\ge 73.96$이니, 자연수 n의 최솟값은 74임을 알 수 있어.

PRACTICE
기출문제 ATTACK

001 [2006학년도 6월 모의평가 가형 이산수학 30번] - STYLE 01 : 함수의 개수

$\{1, 2, 3, 4\}$ 에서 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$로의 함수 중에서 $x_1 < x_2$일 때, $f(x_1) \geq f(x_2)$를 만족시키는 함수 f의 개수를 구하시오. [4점]

002 [2023학년도 9월 모의평가 확통 30번] - STYLE 01 : 함수의 개수, 합성함수와 연결

집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$와 함수 $f: X \rightarrow X$에 대하여 함수 f의 치역을 A, 합성함수 $f \circ f$의 치역을 B라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 함수 f의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $n(A) \leq 3$
(나) $n(A)=n(B)$
(다) 집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $f(x) \neq x$이다.

003 [2023학년도 수능 확통 30번] - STYLE 01 : 함수의 개수, 함숫값 사이의 관계

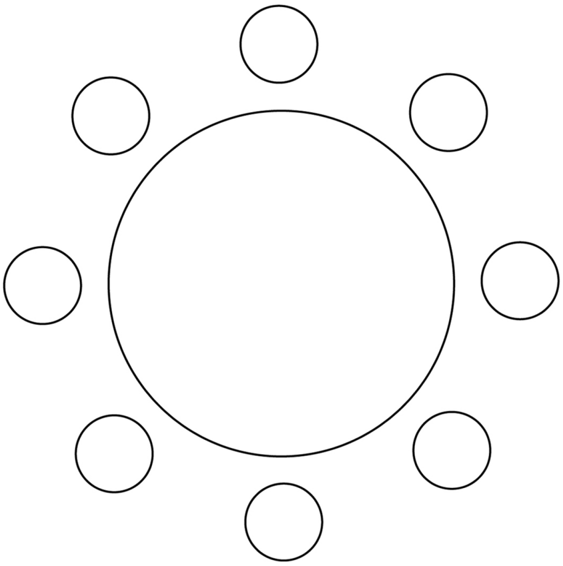
집합 $X=\{x \mid x$는 10 이하의 자연수$\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \rightarrow X$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) 9 이하의 모든 자연수 x에 대하여 $f(x) \leq f(x+1)$이다.
(나) $1 \leq x \leq 5$일 때 $f(x) \leq x$이고, $6 \leq x \leq 10$일 때 $f(x) \geq x$이다.
(다) $f(6)=f(5)+6$

004 [2021학년도 4월 학력평가 확통 29번] - STYLE 01

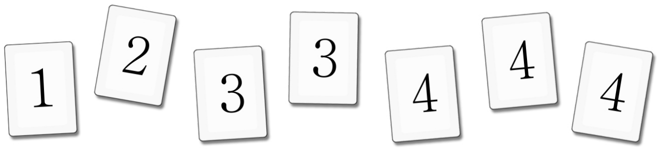
두 남학생 A, B를 포함한 4명의 남학생과 여학생 C를 포함한 4명의 여학생이 있다. 이 8명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 다음 조건을 만족시키도록 모두 둘러앉는 경우의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]

(가) A와 B는 이웃한다.
(나) C는 여학생과 이웃하지 않는다.



005 [2021학년도 3월 학력평가 확통 27번] - STYLE 02

숫자 1, 2, 3, 3, 4, 4, 4가 하나씩 적힌 7장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열할 때, 1이 적힌 카드와 2가 적힌 카드 사이에 두 장 이상의 카드가 있도록 나열하는 경우의 수는? [3점]



① 180　　② 185　　③ 190　　④ 195　　⑤ 200

006 [2008학년도 7월 학력평가 가형/나형 21번] - STYLE 02

주머니 A에 들어 있는 크기가 같은 흰 공 7개를 주머니 B로 모두 옮겨 담으려고 한다. 한 번에 한 개 또는 두 개씩 꺼내어 옮겨 담는 경우의 수를 구하시오. [4점]

007 [2017학년도 4월 학력평가 나형 30번] - STYLE 03

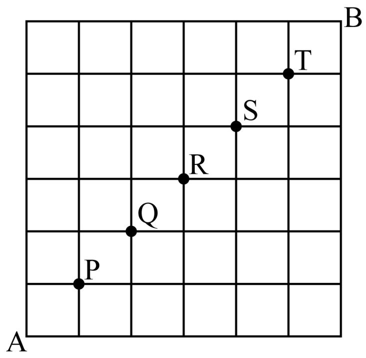
자연수 n에 대하여 0부터 n까지 정수가 하나씩 적힌 $(n+1)$개의 공이 들어 있는 상자가 있다. 이 상자에서 한 개의 공을 꺼내어 공에 적힌 수를 확인하고 다시 넣는 과정을 5번 반복할 때, 확인한 5개의 수가 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 a_n 이라 하자. [4점]

> (가) 꺼낸 공에 적힌 수는 먼저 꺼낸 공에 적힌 수보다 작지 않다.
> (나) 세 번째 꺼낸 공에 적힌 수는 첫 번째 꺼낸 공에 적힌 수보다 1 이 더 크다.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{18} \frac{a_n}{n+2}$ 의 값을 구하시오. [4점]

008 [2006학년도 3월 학력평가 가형 25번] - STYLE 03

그림과 같은 직선 도로망이 있다. 5개의 지점 P, Q, R, S, T 중 어느 한 지점도 지나지 않고 A 지점에서 B 지점까지 최단거리로 갈 수 있는 모든 경로의 수를 구하시오. [4점]



009 [2021학년도 10월 학력평가 확통 29번] - STYLE 03

숫자 1, 2, 3 중에서 모든 숫자가 한 개 이상씩 포함되도록 중복을 허락하여 6개를 선택한 후, 일렬로 나열하여 만들 수 있는 여섯 자리의 자연수 중 일의 자리의 수와 백의 자리의 수가 같은 자연수의 개수를 구하시오. [4점]

010 [2006학년도 수능 가형 이산수학 30번] - STYLE 04

네 종류의 사탕 중에서 15개를 선택하려고 한다. 초콜릿사탕은 4개 이하, 박하사탕은 3개 이상, 딸기사탕은 2개 이상, 버터사탕은 1개 이상을 선택하는 경우의 수를 구하시오. (단, 각 종류의 사탕은 15개 이상씩 있다.) [4점]

011 [2016학년도 4월 학력평가 가형/나형 28번] - STYLE 04

다음 조건을 만족시키는 자연수 x, y, z, w의 모든 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수를 구하시오.

(가) $x+y+z+w=18$
(나) x, y, z, w 중에서 2개는 3으로 나눈 나머지가 1이고, 2개는 3으로 나눈 나머지가 2이다.

012 [2020학년도 6월 모의평가 가형 19번] - STYLE 04

다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 x_1, x_2, x_3, x_4의 모든 순서쌍 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$의 개수는? [4점]

(가) $n=1,\ 2$ 일 때, $x_{n+1}-x_n \geq 2$ 이다.
(나) $x_3 \leq 10$

① 210 ② 220 ③ 230 ④ 240 ⑤ 250

013 [2022학년도 4월 학력평가 확통 28번] - STYLE 04

다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d, e의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$의 개수는? [4점]

> (가) $a+b+c+d+e=10$
> (나) $|a-b+c-d+e| \le 2$

① 359　② 363　③ 367　④ 371　⑤ 375

014 [2014학년도 수능 A형 18번] - STYLE 04

흰색 탁구공 8개와 주황색 탁구공 7개를 3명의 학생에게 남김없이 나누어 주려고 한다. 각 학생이 흰색 탁구공과 주황색 탁구공을 각각 한 개 이상 갖도록 나누어 주는 경우의 수는? [4점]

① 295 ② 300 ③ 305 ④ 310 ⑤ 315

015 [2020학년도 9월 모의평가 가형 28번, 나형 29번] - STYLE 04

연필 7자루와 볼펜 4자루를 다음 조건을 만족시키도록 여학생 3명과 남학생 2명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 연필끼리는 서로 구별하지 않고, 볼펜끼리도 서로 구별하지 않는다.) [4점]

(가) 여학생이 각각 받는 연필의 개수는 서로 같고, 남학생이 각각 받는 볼펜의 개수도 서로 같다.
(나) 여학생은 연필을 1자루 이상 받고, 볼펜을 받지 못하는 여학생이 있을 수 있다.
(다) 남학생은 볼펜을 1자루 이상 받고, 연필을 받지 못하는 남학생이 있을 수 있다.

016 [2022학년도 9월 모의평가 확통 30번] - STYLE 05

네 명의 학생 A, B, C, D에게 같은 종류의 사인펜 14개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. [4점]

(가) 각 학생은 1개 이상의 사인펜을 받는다.
(나) 각 학생이 받는 사인펜의 개수는 9 이하이다.
(다) 적어도 한 학생은 짝수 개의 사인펜을 받는다.

017 [2019학년도 9월 모의평가 나형 20번] - STYLE 05

상자 A 와 상자 B 에 각각 6 개의 공이 들어 있다. 동전 1 개를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 동전을 한 번 던져 앞면이 나오면 상자 A 에서 공 1 개를 꺼내어 상자 B 에 넣고, 뒷면이 나오면 상자 B 에서 공 1 개를 꺼내어 상자 A 에 넣는다.

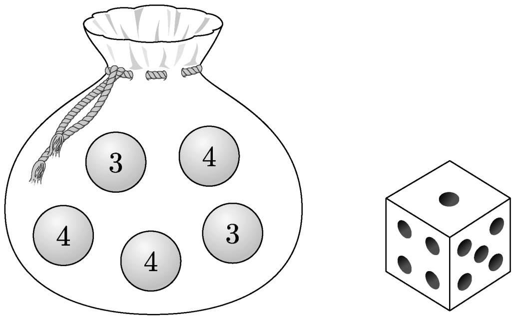
위의 시행을 6 번 반복할 때, 상자 B 에 들어 있는 공의 개수가 6 번째 시행 후 처음으로 8 이 될 확률은? [4점]

① $\frac{1}{64}$ ② $\frac{3}{64}$ ③ $\frac{5}{64}$ ④ $\frac{7}{64}$ ⑤ $\frac{9}{64}$

018 [2021학년도 수능 가형 19번, 나형 29번] - STYLE 05

숫자 $3,\ 3,\ 4,\ 4,\ 4$가 하나씩 적힌 5개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 규칙에 따라 점수를 얻는 시행을 한다. [4점]

> 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어
> 꺼낸 공에 적힌 수가 3이면 주사위를 3번 던져서 나오는 세 눈의 수의 합을 점수로 하고,
> 꺼낸 공에 적힌 수가 4이면 주사위를 4번 던져서 나오는 네 눈의 수의 합을 점수로 한다.



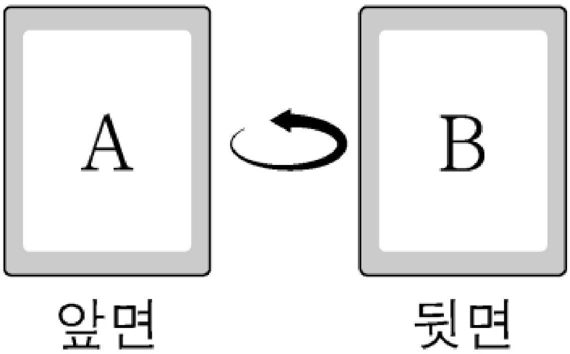
① $\frac{13}{180}$　② $\frac{41}{540}$　③ $\frac{43}{540}$　④ $\frac{1}{12}$　⑤ $\frac{47}{540}$

019 [2024학년도 9월 모의평가 29번] - STYLE 05

앞면에는 문자 A, 뒷면에는 문자 B가 적힌 한 장의 카드가 있다. 이 카드의 한 개의 동전을 사용하여 다음 시행을 한다.

> 동전을 두 번 던져
> 앞면이 나온 횟수가 2이면 카드를 한 번 뒤집고,
> 앞면이 나온 횟수가 0 또는 1이면 카드를 그대로 둔다.

처음에 문자 A가 보이도록 카드가 놓여 있을 때, 이 시행을 5번 반복한 후 문자 B가 보이도록 카드가 놓일 확률은 p이다. $128 \times p$의 값을 구하시오. [4점]



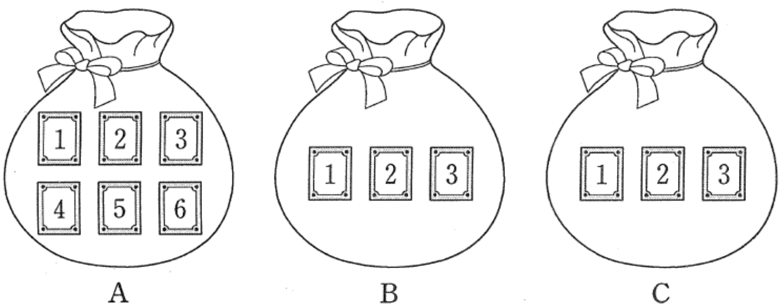
020 [2005학년도 9월 모의평가 나형 23번] - STYLE 05

A 주머니에 흰 공 2개, 검은 공 5개 그리고 B 주머니에 흰 공 3개, 검은 공 4개가 들어 있다. A 주머니에서 한 개의 공을 임의로 꺼내어 B 주머니에 넣은 다음 다시 B 주머니에서 하나의 공을 꺼내기로 한다. B에서 꺼낸 공이 흰 공일 때, A에서 B로 옮겨진 공이 흰 공이었을 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $10p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

021 [2018학년도 9월 모의평가 가형 28번] - STYLE 05

그림과 같이 주머니 A 에는 1 부터 6 까지의 자연수가 하나씩 적힌 6 장의 카드가 들어 있고 주머니 B 와 C 에는 1 부터 3 까지의 자연수가 하나씩 적힌 3 장의 카드가 각각 들어 있다. 갑은 주머니 A 에서, 을은 주머니 B 에서, 병은 주머니 C 에서 각자 임의로 1 장의 카드를 꺼낸다. 이 시행에서 갑이 꺼낸 카드에 적힌 수가 을이 꺼낸 카드에 적힌 수보다 클 때, 갑이 꺼낸 카드에 적힌 수가 을과 병이 꺼낸 카드에 적힌 수의 합보다 클 확률이 k 이다. $100k$ 의 값을 구하시오. [4점]



022 [2020학년도 9월 모의평가 가형 18번, 나형 20번 변형] - STYLE 05

빨간색 공 6개, 파란색 공 3개, 노란색 공 3개가 들어있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내는 시행을 하여, 다음 규칙에 따라 세 사람 A, B, C가 점수를 얻는다. (단, 한 번 꺼낸 공은 다시 주머니에 넣지 않는다.)

- 빨간색 공이 나오면 A는 3점, B는 1점, C는 1점을 얻는다.
- 파란색 공이 나오면 A는 2점, B는 6점, C는 2점을 얻는다.
- 노란색 공이 나오면 A는 2점, B는 2점, C는 6점을 얻는다.

이 시행을 계속하여 얻은 점수의 합이 처음으로 24점 이상인 사람이 나오면 시행을 멈춘다. 다음은 얻은 점수의 합이 24점 이상인 사람이 A뿐일 확률은? [4점]

① $\frac{3}{22}$　② $\frac{8}{55}$　③ $\frac{17}{110}$　④ $\frac{9}{55}$　⑤ $\frac{19}{110}$

023 [2022학년도 사관학교 확통 30번] - STYLE 05

검은 공 4개, 흰 공 2개가 들어 있는 주머니에 대하여 다음 시행을 2회 반복한다.

> 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낸 후, 꺼낸 공 중에서 흰 공은 다시 주머니에 넣고 검은 공은 다시 넣지 않는다.

두 번째 시행의 결과 주머니에 흰 공만 2개 들어 있을 때, 첫 번째 시행의 결과 주머니에 들어 있는 검은 공의 개수가 2일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

024 [2022학년도 7월 학력평가 확통 30번] - STYLE 05

각 면에 숫자 1, 1, 2, 2, 2, 2가 하나씩 적혀 있는 정육면체 모양의 상자가 있다. 이 상자를 6번 던질 때, n $(1 \le n \le 6)$번째에 바닥에 닿은 면에 적혀 있는 수를 a_n이라 하자. $a_1 + a_2 + a_3 > a_4 + a_5 + a_6$일 때, $a_1 = a_4 = 1$일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

025 [2004학년도 3월 학력평가 가형 14번] - STYLE 05

2005학년도 대학수학능력시험 수리영역의 원점수 X의 평균을 m, 표준편차를 σ라 할 때 표준점수 T는

$$T = a\left(\frac{X-m}{\sigma}\right) + b \ (\text{단}, \ a > 0)$$

꼴로 나타내어진다. 수리영역의 표준점수 T가 평균이 100, 표준편차가 20인 분포를 이룬다고 할 때, 두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은? [4점]

① 80 ② 90 ③ 100 ④ 110 ⑤ 120

026 [2018학년도 수능 가형 19번 변형] - STYLE 05

무게가 1인 추 6개, 무게가 2인 추 3개와 비어 있는 주머니 1개가 있다. 주사위 한 개를 사용하여 다음의 시행을 한다. (단, 무게의 단위는 g 이다.)

주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 2 이하이면 무게가 1 인 추 1 개를 주머니에 넣고, 눈의 수가 3 이상이면 무게가 2 인 추 1 개를 주머니에 넣는다.

위의 시행을 반복하여 주머니에 들어 있는 추의 총무게가 처음으로 6보다 크거나 같을 때, 주머니에 들어 있는 추의 개수를 확률변수 X라 하자. $243 \times \mathrm{E}(X)$ 의 값을 구하시오. [4점]

① 920 ② 922 ③ 924 ④ 926 ⑤ 928

027 [2021학년도 10월 학력평가 확통 30번] - STYLE 05

주머니에 12개의 공이 들어 있다. 이 공들 각각에는 숫자 1, 2, 3, 4 중 하나씩이 적혀 있다. 이 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는 시행을 한다. 이 시행을 4번 반복하여 확인한 4개의 수의 합을 확률변수 X 라 할 때, 확률변수 X는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\mathrm{P}(X=4)=16\times\mathrm{P}(X=16)=\frac{1}{81}$

(나) $\mathrm{E}(X)=9$

$\mathrm{V}(X)=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p 와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

028 [2024학년도 9월 모의평가 확통 28번] - STYLE 05

주머니 A 에는 숫자 1, 2, 3 이 하나씩 적힌 3 개의 공이 들어 있고, 주머니 B 에는 숫자 1, 2, 3, 4 가 하나씩 적힌 4 개의 공이 들어 있다. 두 주머니 A, B 와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져
> 나온 눈의 수가 3 의 배수이면
> 주머니 A 에서 임의로 2 개의 공을 동시에 꺼내고,
> 나온 눈의 수가 3 의 배수가 아니면
> 주머니 B 에서 임의로 2 개의 공을 동시에 꺼낸다.
> 꺼낸 2 개의 공에 적혀 있는 수의 차를 기록한 후,
> 공을 꺼낸 주머니에 이 2 개의 공을 다시 넣는다.

이 시행을 2 번 반복하여 기록한 두 개의 수의 평균을 $\overline{X}$ 라 할 때, $\mathrm{P}\left(\overline{X}=2\right)$ 의 값은? [4점]

① $\frac{11}{81}$ ② $\frac{13}{81}$ ③ $\frac{5}{27}$ ④ $\frac{17}{81}$ ⑤ $\frac{19}{81}$

029 [2004학년도 10월 학력평가 나형 9번] - STYLE 05

연속확률변수 X가 취하는 값의 범위가 $0 \le X \le 2$이고, 확률밀도함수 $f(x)$가

$$f(x) = kx \quad (0 \le x \le 2)$$

일 때, 확률 $\mathrm{P}(0 \le X \le k)$의 값은? (단, k는 상수) [4점]

① $\frac{1}{32}$ ② $\frac{1}{16}$ ③ $\frac{1}{8}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

030 [2007학년도 수능 나형 24번] - STYLE 05

두 양수 a, b에 대하여 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $0 \leq X \leq a$이고, 확률밀도함수의 그래프는 다음과 같다.

$\mathrm{P}\left(0 \leq X \leq \frac{a}{2}\right) = \frac{b}{2}$일 때, $a^2 + 4b^2$의 값을 구하시오. [4점]

031 [2015학년도 9월 모의평가 나형 29번] - STYLE 05

구간 $[0,\ 3]$의 모든 실수값을 가지는 연속확률변수 X에 대하여

$$\mathrm{P}(x \leq X \leq 3) = a(3-x)\ (0 \leq x \leq 3)$$

이 성립할 때, $\mathrm{P}(0 \leq X < a) = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

032 [2022학년도 7월 학력평가 확통 29번] - STYLE 05

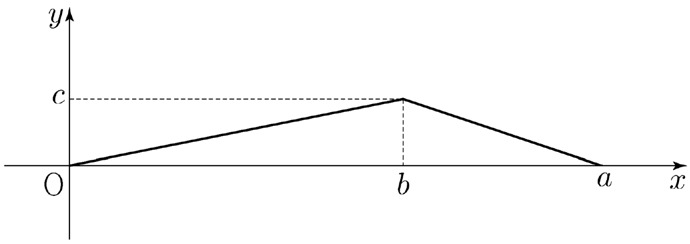
두 연속확률변수 X와 Y가 갖는 값의 범위는 각각 $0 \leq X \leq a$, $0 \leq Y \leq a$이고, X와 Y의 확률밀도함수를 각각 $f(x)$, $g(x)$라 하자. $0 \leq x \leq a$인 모든 실수 x에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는

$$f(x) = b, \ g(x) = \mathrm{P}(0 \leq X \leq x)$$

이다. $\mathrm{P}(0 \leq Y \leq c) = \frac{1}{2}$일 때, $(a+b) \times c^2$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 상수이다.) [4점]

033 [2023학년도 수능 확통 28번] - STYLE 05

연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $0 \leq X \leq a$이고, X의 확률밀도함수의 그래프가 그림과 같다.



$\mathrm{P}(X \leq b) - \mathrm{P}(X \geq b) = \frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(X \leq \sqrt{5}) = \frac{1}{2}$일 때, $a+b+c$의 값은? (단, a, b, c는 상수이다.) [4점]

① $\frac{11}{2}$　② 6　③ $\frac{13}{2}$　④ 7　⑤ $\frac{15}{2}$

034 [2006학년도 9월 모의평가 가형 확률과 통계 29번] - STYLE 05

확률변수 X와 Y가 평균이 0이고 표준편차가 각각 a와 b인 정규분포를 따를 때, 〈보기〉에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

〈 보기 〉

ㄱ. $\mathrm{P}(1 \le X \le 2) = \mathrm{P}(2 \le X \le 3)$

ㄴ. $\mathrm{P}(-a \le X \le 0) = \mathrm{P}(0 \le Y \le b)$

ㄷ. $\mathrm{P}(-1 \le X \le 1) = \mathrm{P}(-2 \le Y \le 2)$이면 $a < b$이다.

① ㄴ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

035 [2017학년도 수능 가형 18번, 나형 29번] - STYLE 05

확률변수 X는 평균이 m, 표준편차가 5인 정규분포를 따르고, 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(10) > f(20)$

(나) $f(4) < f(22)$

m이 자연수일 때, $\mathrm{P}(17 \le X \le 18) = a$이다. $1000a$의 값을 아래 표준정규분포표를 이용하여 구하시오. [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.6	0.226
0.8	0.288
1.0	0.341
1.2	0.385
1.4	0.419

036 [2021학년도 7월 학력평가 확통 28번] - STYLE 05

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 2^2)$, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따른다. 상수 a에 대하여 두 확률변수 X, Y가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $Y = 3X - a$
(나) $\mathrm{P}(X \le 4) = \mathrm{P} = (Y \ge a)$

$\mathrm{P}(Y \ge 9)$의 값을 아래 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

<표준정규분포표>

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.0228 ② 0.0668 ③ 0.1587 ④ 0.2417 ⑤ 0.3085

037 [2023학년도 10월 학력평가 확통 28번] - STYLE 05

정규분포를 따르는 두 확률변수 X, Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x)$, $g(x)$이다. $\mathrm{V}(X)=\mathrm{V}(Y)$이고, 양수 a에 대하여

$$f(a)=f(3a)=g(2a),\ \mathrm{P}(Y \le 2a)=0.6915$$

일 때, $\mathrm{P}(0 \le X \le 3a)$의 값을 아래 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

<표준정규분포표>

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.5328 ② 0.6247 ③ 0.6687 ④ 0.7745 ⑤ 0.8185

038 [2019학년도 9월 모의평가 가형 17번] - STYLE 05

어느 고등학교 학생들의 1개월 자율학습실 이용 시간은 평균이 m, 표준편차가 5인 정규분포를 따른다고 한다. 이 고등학교 학생 25명을 임의추출하여 1개월 자율학습실 이용 시간을 조사한 표본평균이 $\overline{x_1}$ 일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $80-a \le m \le 80+a$ 이었다.
또 이 고등학교 학생 n명을 임의추출하여 1개월 자율학습실 이용 시간을 조사한 표본평균이 $\overline{x_2}$ 일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 다음과 같다.

$$\frac{15}{16}\overline{x_1}-\frac{5}{7}a \le m \le \frac{15}{16}\overline{x_1}+\frac{5}{7}a$$

$n+\overline{x_2}$ 의 값은? (단, 이용 시간의 단위는 시간이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.96)=0.475$로 계산한다.) [4점]

① 121 ② 124 ③ 127 ④ 130 ⑤ 133

039 [2022학년도 수능 확통 27번] - STYLE 05

어느 자동차 회사에서 생산하는 전기 자동차의 1회 충전 주행 거리는 평균이 m이고 표준편차가 σ인 정규분포를 따른다고 한다. 이 자동차 회사에서 생산한 전기 자동차 100대를 임의추출하여 얻은 1회 충전 주행 거리의 표본평균이 $\overline{x_1}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $a \leq m \leq b$이다.

이 자동차 회사에서 생산한 전기 자동차 400대를 임의추출하여 얻은 1회 충전 주행 거리의 표본평균이 $\overline{x_2}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간이 $c \leq m \leq d$이다.

$\overline{x_1} - \overline{x_2} = 1.34$이고 $a = c$일 때, $b - a$의 값은?

(단, 주행 거리의 단위는 km이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \leq 1.96) = 0.95$, $\mathrm{P}(|Z| \leq 2.58) = 0.99$로 계산한다.) [4점]

① 5.88　② 7.84　③ 9.80　④ 11.76　⑤ 13.72

040 [자체 제작 문항] - STYLE 02

주머니에 1부터 6까지의 자연수가 각각 하나씩 적혀있는 검은 구슬 6개와 숫자 3이 적혀있는 흰 구슬 3개가 있다. 주머니에 있는 모든 구슬을 서로 다른 세 상자 A, B, C에 나누어 담을 때, 상자 A에 담겨있는 검은 구슬의 개수를 3 또는 4이도록 한다. 상자 B에 들어있는 흰 구슬의 개수가 1일 때, 상자 C에 들어있는 모든 구슬에 적혀있는 숫자의 합이 4보다 크거나 같을 확률은?
(단, 흰색 구슬은 서로 구별하지 않고, 한 상자에는 적어도 하나 이상의 구슬이 들어있다.) [4점]

① $\dfrac{102}{125}$ ② $\dfrac{104}{125}$ ③ $\dfrac{106}{125}$ ④ $\dfrac{108}{125}$ ⑤ $\dfrac{22}{25}$

기출문제 ATTACK 정답 및 해설

빠른 정답

1	210	2	260	3	100	4	288	5	⑤
6	21	7	760	8	84	9	150	10	185
11	210	12	①	13	④	14	⑤	15	49
16	218	17	③	18	⑤	19	62	20	238
21	50	22	④	23	41	24	133	25	⑤
26	⑤	27	23	28	⑤	29	②	30	10
31	10	32	5	33	④	34	④	35	62
36	⑤	37	①	38	②	39	②	40	④

해 설

001

[정답] 210

구하는 함수의 개수는 공역의 7개의 원소 중에서 4개를 뽑는 중복조합의 수와 같다.

$\therefore {}_{7+4-1}C_4 = {}_{10}C_4 = 210$

002

[정답] 260

조건 (가)에서 $n(A)=1$ 또는 $n(A)=2$ 또는 $n(A)=3$

(다) 조건에서 $n(A)=1$인 경우에 반드시 $f(x)=x$인 경우가 생기므로 $n(A)=2$ 또는 $n(A)=3$이다.

$B \subset A$이므로 조건 (나)에서 $n(A)=n(B)$이려면 $A=B$

ㄱ) $n(A)=2$인 경우

$A=B=\{1, 2\}$라 하면 $f(1)=2$, $f(2)=1$이어야 하고

$f(3)$, $f(4)$, $f(5)$는 1 또는 2이어야 한다.

또, $n(A)=2$인 A를 결정하는 방법은 ${}_5C_2$이므로

$n(A)=2$인 경우의 수는 ${}_5C_2 \times 2^3 = 80$

ㄴ) $n(A)=3$인 경우

$A=B=\{1, 2, 3\}$라 하면, $f(1)=2$라 하면, $f(3)=1$, $f(2)=3$이어야 하고 $f(1)=3$이라하면, $f(2)=1$, $f(3)=2$이어야 한다.

이때, $f(4)$, $f(5)$의 함숫값은 1 또는 2 또는 3이고 $n(A)=3$인 A를 결정하는 방법은

${}_5C_3 \times 2 \times 3^2 = 180$

따라서 구하는 함수 f의 개수는 $80+180=260$

003

[정답] 100

조건 (나)에서 $f(1)=1$, $f(10)=10$이다.

(ⅰ) $f(5)=1$, $f(6)=7$인 경우

$f(5)=1$일 때 조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍 $(f(2), f(3), f(4))$는 $(1, 1, 1)$의 1개가 존재한다.

$f(6)=7$일 때 조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍 $(f(7), f(8), f(9))$는

$(7, 8, 9)$, $(7, 8, 10)$, $(7, 9, 9)$, $(7, 9, 10)$, $(7, 10, 10)$,

$(8, 8, 9)$, $(8, 8, 10)$, $(8, 9, 9)$, $(8, 9, 10)$, $(8, 10, 10)$,

$(9,\ 9,\ 9)$, $(9,\ 9,\ 10)$, $(9,\ 10,\ 10)$, $(10, 10,\ 10)$ 의 14개가 존재한다.

따라서 이 경우의 함수 f의 개수는 $1\times14=14$이다.

(ⅱ) $f(5)=2$, $f(6)=8$인 경우

$f(5)=2$일 때 조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍 $(f(2),\ f(3),\ f(4))$는

$(1,\ 1,\ 1)$, $(1,\ 1,\ 2)$, $(1,\ 2,\ 2)$, $(2,\ 2,\ 2)$ 의 4 $(={}_2\mathrm{H}_3={}_4\mathrm{C}_3)$개가 존재한다.

$f(6)=8$일 때 조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍 $(f(7),\ f(8),\ f(9))$는

$(8,\ 8,\ 9)$, $(8,\ 8,\ 10)$, $(8,\ 9,\ 9)$, $(8,\ 9,\ 10)$, $(8,\ 10,\ 10)$,

$(9,\ 9,\ 9)$, $(9,\ 9,\ 10)$, $(9,\ 10,\ 10)$, $(10,\ 10,\ 10)$ 의 9개가 존재한다.

따라서 이 경우의 함수 f의 개수는 $4\times9=36$이다.

(ⅲ) $f(5)=3$, $f(6)=9$인 경우

$f(5)=3$일 때 조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍 $(f(2),\ f(3),\ f(4))$는

$(1,\ 1,\ 1)$, $(1,\ 1,\ 2)$, $(1,\ 1,\ 3)$, $(1,\ 2,\ 2)$, $(1,\ 2,\ 3)$, $(1,\ 3,\ 3)$ $(2,\ 2,\ 2)$, $(2,\ 2,\ 3)$ $(2,\ 3,\ 3)$ 의 9개가 존재한다.

$f(6)=9$일 때 조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍 $(f(7),\ f(8),\ f(9))$는

$(9,\ 9,\ 9)$, $(9,\ 9,\ 10)$, $(9,\ 10,\ 10)$, $(10,\ 10,\ 10)$ 의 4 $(={}_2\mathrm{H}_3={}_4\mathrm{C}_3)$개가 존재한다.

따라서 이 경우 함수 f의 개수는 $9\times4=36$이다.

(ⅳ) $f(5)=4$, $f(6)=10$인 경우

$f(5)=4$일 때 조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍 $(f(2),\ f(3),\ f(4))$는

$(1,\ 1,\ 1)$, $(1,\ 1,\ 2)$, $(1,\ 1,\ 3)$, $(1,\ 1,\ 4)$

$(1,\ 2,\ 2)$, $(1,\ 2,\ 3)$, $(1,\ 2,\ 4)$, $(1,\ 3,\ 3)$, $(1,\ 3,\ 4)$,

$(2,\ 2,\ 2)$, $(2,\ 2,\ 3)$, $(2,\ 2,\ 4)$, $(2,\ 3,\ 3)$, $(2,\ 3,\ 4)$

의 14개가 존재한다.

$f(6)=10$일 때 조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍 $(f(7),\ f(8),\ f(9))$는 $(10,\ 10,\ 10)$

의 1개가 존재한다.

따라서 이 경우의 함수 f의 개수는 $14\times1=14$이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ), (ⅳ)에서 구하는 함수 f의 개수는

$14+36+36+14=100$

[다른 풀이]

조건 (나)에서 $f(1)=1$, $f(10)=10$이다.

(ⅰ) $f(5)=1$, $f(6)=7$인 경우

$f(5)=1$일 때 조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍 $(f(2),\ f(3),\ f(4))$는 $(1,\ 1,\ 1)$ 의 1개가 존재한다.

$f(6)=7$일 때 조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍 $(f(7),\ f(8),\ f(9))$의 개수는 다음과 같다.

① $f(9)=9$일 때

${}_3\mathrm{H}_2-1={}_4\mathrm{C}_2-1=6-1=5$ $(f(7)=f(8)=7$인 경우를 제외함)

② $f(9)=10$일 때

${}_4\mathrm{H}_2-1={}_5\mathrm{C}_2-1=10-1=9$ $(f(7)=f(8)=7$인 경우를 제외함)

따라서 이 경우의 함수 f의 개수는 $5+9=14$이다.

(ⅱ) $f(5)=2$, $f(6)=8$인 경우

① $f(5)=2$일 때 조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍 $(f(2),\ f(3),\ f(4))$의 개수는 ${}_2\mathrm{H}_3={}_4\mathrm{C}_3=4$이다.

② $f(6)=8$일 때 조건 (가)와 조건 (나)를 만족시키는 순서쌍 $(f(7),\ f(8),\ f(9))$의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_3-1={}_5\mathrm{C}_3-1=10-1=9$

$(f(7)=f(8)=f(9)=8$인 경우를 제외함)

따라서 이 경우의 함수 f의 개수는 $4\times9=36$이다.

(ⅲ) 조건 (나)와 조건 (다)에서 함수 f의 $1\le x\le5$일 때의 규칙성과 $6\le x\le10$일 때의 규칙성이 서로 대칭적이므로

$f(5)=3$, $f(6)=9$인 함수 f의 개수는 (ⅱ)의 함수의 개수와 같고,

$f(5)=4$, $f(6)=10$인 함수 f의 개수는 (ⅰ)의 함수의 개수와 같음을 추론할 수 있다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 함수 f의 개수는

$2\times(14+36)=2\times50=100$

004

[정답] 288

남학생 4명 중 A, B가 아닌 남학생 2명을 D, E라 하면

(i) C가 D, E와 모두 이웃하는 경우

A, B를 한 학생으로 생각하고, D, C, E를 한 학생으로 생각하여

5명의 학생을 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

이 각각에 대하여 A, B가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!$,

D, E가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!$이므로

구하는 경우의 수는 $24\times2!\times2!=96$

(ii) C가 A또는 B중 한 명과 이웃하는 경우

D 또는 E중 한 명과 C, A, B의 총 4명을 한 학생으로 생각하여

5명의 학생을 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

이 각각에 대하여 D 또는 E 중 한 명을 선택하는 경우의 수는 ${}_2C_1$, A, B가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수 $2!$, A, B를 한 학생으로 생각하여 C와 이웃한 두 학생이 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!$이므로

구하는 경우의 수는 $24\times{}_2C_1\times2!\times2!=192$

(i), (ii)에 의해 구하는 경우의 수는

$96+192=288$

005

[정답] ⑤

숫자 3, 3, 4, 4, 4가 적힌 5장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{5!}{2!\times3!}=10$이다.

□에 숫자 3, 4를 나열하고 ∨ 중 두 곳에 숫자 1, 2를 각각 나열할 수 있다고 하자.

∨□∨□∨□∨□∨□∨

이 각각의 경우에 대하여 숫자 1, 2가 적힌 2장의 카드를 두 카드 사이에 두 장 이상의 카드가 있도록 나열하려면 ∨ 6곳 중 서로 다른 두 곳에 배열하는 경우의 수에서 연속으로 ∨ 두 곳에 배열하는 경우의 수를 빼면 되므로 이 경우의 수는

${}_6P_2-5\times2=20$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times20=200$

006

[정답] 21

i) 1개씩 7번 옮기는 경우 : 1

ii) 1개씩 5번, 2개씩 1번 옮기는 경우 : $\dfrac{6!}{5!}=6$

iii) 1개씩 3번, 2개씩 2번 옮기는 경우 : $\dfrac{5!}{3!2!}=10$

iv) 1개씩 1번, 2개씩 3번 옮기는 경우 : $\dfrac{4!}{3!}=4$

∴ 21가지

007

[정답] 760

자연수 n에 대하여 0부터 n까지 정수가 하나씩 적힌 $(n+1)$개의 공이 들어 있는 상자에서 한 개의 공을 꺼내어 공에 적힌 수를 확인하고 다시 넣는 5번의 과정 중 m번째 꺼낸 공에 적힌 수를 $f(m)$이라 할 때,

조건 (가)에 의하여

$f(1)\le f(2)\le f(3)\le f(4)\le f(5)$

조건 (나)에 의하여 $f(3)=f(1)+1$

$f(1)=a(a=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$이라 하면

$f(3)=a+1$

$a\le f(2)\le a+1\le f(4)\le f(5)$

(i) $f(2)$를 선택하는 경우는

$f(2)=a$ 또는 $f(2)=a+1$이므로

이 경우의 수는 2 ……㉠

(ii) $f(3)$이 결정되면 $f(1)$은 유일하므로

$f(3)$, $f(4)$, $f(5)$를 선택하는 경우만 고려하면 된다.

$f(3)=a+1\ge1$이므로

$f(3)$, $f(4)$, $f(5)$를 선택하는 경우는

1부터 n까지 수 중에서 중복을 허락하여 3개를 선택하는 중복조합의 수와 같다.

이 경우의 수는 ${}_nH_3$ ……㉡

㉠, ㉡에 의하여

$$a_n = 2\times {}_nH_3 = 2\times {}_{n+2}C_3 = 2\times\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

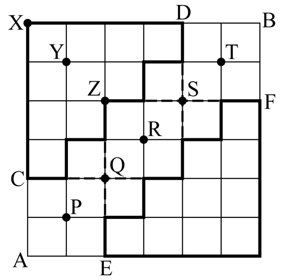
$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{18}\frac{a_n}{n+2} = 760$$

008

[정답] 84

다음 그림에서 C에서 D까지 최단거리의 경로의 수는



i) A→C→X→D→B : 1

ii) A→C→Y→D→B : $1\times\frac{4!}{3!}\times\frac{4!}{3!}\times 1 = 16$

iii) A→C→Z→D→B :

$1\times\left(\frac{4!}{2!2!}-1\right)\left(\frac{4!}{2!2!}-1\right)\times 1 = 25$

이므로 $1+16+25=42$ (가지)

마찬가지로 E에서 F까지 최단거리의 경로의 수도 42(가지)이다.

따라서 구하는 최단거리의 경로의 수는

$42+42=84$ (가지)

009

[정답] 150

일의 자리와 백의 자리에 오는 숫자가 1일 때, 나머지 네 자리에 2와 3이 적어도 하나씩 포함되는 경우는 다음과 같다.

(i) 1, 1, 2, 3을 나열하는 경우

4개의 숫자를 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$

(ii) 1, 2, 2, 3 또는 1, 2, 3, 3을 나열하는 경우

4개의 숫자를 나열하는 경우의 수가 $\frac{4!}{2!}=12$이므로

(ii)의 경우의 수는 $2\times 12=24$

(iii) 2, 2, 2, 3 또는 2, 3, 3, 3을 나열하는 경우

4 개의 숫자를 나열하는 경우의 수가 $\frac{4!}{3!}=4$이므로

(iii)의 경우의 수는 $2\times 4=8$

(iv) 2, 2, 3, 3 을 나열하는 경우

4개의 숫자를 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!\times 2!}=6$

(i) (iv)에 의해 일의 자리와 백의 자리에 오는 숫자가 1 인 경우의 수는 $12+24+8+6=50$

일의 자리와 백의 자리에 오는 숫자가 2인 경우의 수와 3인 경우의 수도 같은 방법으로 생각하면 각각 50이다.

따라서 구하는 자연수의 개수는 $3\times 50=150$

010

[정답] 185

i) 초콜릿사탕 4개를 택할 때,

박하사탕, 딸기사탕, 버터사탕을 각각 3개, 2개, 1개씩 택한 후, 박하사탕, 딸기사탕, 버터사탕 중에서 중복을 허락하여 나머지 5개의 사탕을 추가로 택하면 된다.

이 때, 이 경우의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 5개를 뽑는 중복조합의 수와 같으므로

${}_{3+5-1}C_5 = {}_7C_2 = 21$

ii) 초콜릿사탕 3개를 택할 때,

박하사탕, 딸기사탕, 버터사탕을 각각 3개, 2개, 1개씩 택한 후, 박하사탕, 딸기사탕, 버터사탕 중에서 중복을 허락하여 나머지 6개의 사탕을 추가로 택하면 되므로 이 경우의 수는

${}_{3+6-1}C_6 = {}_8C_2 = 28$

iii) 초콜릿사탕 2개를 택할 때,

박하사탕, 딸기사탕, 버터사탕을 각각 3개, 2개, 1개씩 택한 후, 박하사탕, 딸기사탕, 버터사탕 중에서 중복을 허락하여 나머지 7개의 사탕을 추가로 택하면 되므로 이 경우의 수는

${}_{3+7-1}C_7 = {}_9C_2 = 36$

iv) 초콜릿사탕 1개를 택할 때,

박하사탕, 딸기사탕, 버터사탕을 각각 3개, 2개, 1개씩 택한 후, 박하사탕, 딸기사탕, 버터사탕 중에서 중복을 허락하여 나머지 8개의 사탕을 추가로 택하면 되므로 이 경우의 수는

${}_{3+8-1}\mathrm{C}_8 = {}_{10}\mathrm{C}_2 = 45$

v) 초콜릿사탕 0개를 택할 때,
박하사탕, 딸기사탕, 버터사탕을 각각 3개, 2개, 1개씩 택한 후, 박하사탕, 딸기사탕, 버터사탕 중에서 중복을 허락하여 나머지 9개의 사탕을 추가로 택하면 되므로 이 경우의 수는

${}_{3+9-1}\mathrm{C}_9 = {}_{11}\mathrm{C}_2 = 55$

따라서 구하는 경우의 수는

$21+28+36+45+55=185$

011

[정답] 210

(나)에서 자연수 x, y, z, w 중 3으로 나눈 나머지가 1인 수 2개를 선택하고 3으로 나눈 나머지가 2인 수 2개를 선택하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_2 \times {}_2\mathrm{C}_2 = 6$

x, y가 3으로 나눈 나머지가 1인 수,
z, w는 3으로 나눈 나머지가 2인 수라 하면

$x=3x'+1$, $y=3y'+1$, $z=3z'+2$, $w=3w'+2$
(x', y', z', w'은 음이 아닌 정수)

(가)에서 $x+y+z+w=18$

$(3x'+1)+(3y'+1)+(3z'+2)+(3w'+2)=18$

$x'+y'+z'+w'=4$ …… ㉠

이때 ㉠을 만족시키는 음이 아닌 정수해의 개수는 4개의 문자 x', y', z', w'에서 4개를 선택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4\mathrm{H}_4 = {}_{4+4-1}\mathrm{C}_4 = {}_7\mathrm{C}_4 = 35$

따라서 모든 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는

$6 \times 35 = 210$

012

[정답] ①

$x_{n+1} - x_n = a_n$ $(n=1, 2, 3)$이라 하면

조건 (가)에서 $a_n \geq 2$이고

$(x_4-x_3)+(x_3-x_2)+(x_2-x_1) = x_4 - x_1$이므로

$a_1+a_2+a_3 = x_4 - x_1$

이때

$x_1+a_1+a_2+a_3 = x_4 \leq 12$이므로

$12 - x_4 = a_4$라 하면 $a_4 \geq 0$이고

$x_1+a_1+a_2+a_3+a_4 = 12$ … ㉠

이때, $a_n{}' = a_n - 2$ $(n=1, 2, 3)$이라 하면

$x_1 + a_1{}' + a_2{}' + a_3{}' + a_4 = 6$ … ㉡

이때

$x_1 \geq 0$, $a_1{}' \geq 0$, $a_2{}' \geq 0$, $a_3{}' \geq 0$, $a_4 \geq 0$이므로
㉡을 만족시키는 순서쌍 $(x_1, a_1{}', a_2{}', a_3{}', a_4)$의 개수는

${}_5\mathrm{H}_6 = {}_{5+6-1}\mathrm{C}_6 = {}_{10}\mathrm{C}_6 = {}_{10}\mathrm{C}_4$

$= \dfrac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1} = 210$

013

[정답] ④

조건 (가)의 $a+b+c+d+e=10$과
조건 (나)의 $-2 \leq a-b+c-d+e \leq 2$에서

$8 \leq 2a+2c+2e \leq 12$

$4 \leq a+c+e \leq 6$

(ⅰ) $a+c+e=4$일 때
$b+d=6$이고, 구하는 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는
두 방정식 $a+c+e=4$, $b+d=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_4 \times {}_2\mathrm{H}_6 = {}_6\mathrm{C}_4 \times {}_7\mathrm{C}_6 = 15\times7 = 105$

(ⅱ) $a+c+e=5$일 때
$b+d=5$이고, 구하는 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는
두 방정식 $a+c+e=5$, $b+d=5$를 만족시키는 음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_5 \times {}_2\mathrm{H}_5 = {}_7\mathrm{C}_5 \times {}_6\mathrm{C}_5 = 21\times6 = 126$

(ⅲ) $a+c+e=6$일 때
$b+d=4$이고, 구하는 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는
두 방정식 $a+c+e=6$, $b+d=4$를 만족시키는 음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_6 \times {}_2\mathrm{H}_4 = {}_8\mathrm{C}_6 \times {}_5\mathrm{C}_4 = 28\times5 = 140$

따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 순서쌍의 개수는

$105+126+140=371$

014

[정답] ⑤

3명의 학생이 흰색 탁구공을 각각 x, y, z개씩 받는다면

$x+y+z=8(x \ge 1,\ y \ge 1,\ z \ge 1$인 자연수)

$\therefore\ {}_{3+5-1}C_5={}_7C_5=21$ …… ㉠

주황색 탁구공을 각각 x', y', z'개씩 받는다면

$x'+y'+z'=7(x' \ge 1,\ y' \ge 1,\ z' \ge 1$인 자연수)

$\therefore\ {}_{3+4-1}C_4={}_6C_4=15$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $21\times15=315$

015

[정답] 49

주어진 조건을 표로 나타내면 다음과 같다.

여학생	A	B	C	합
연필	s개	s개	s개	$3s$개
볼펜				$4-2t$

남학생	a	b	합
연필			$7-3s$
볼펜	t개	t개	$2t$개

(1) 여학생이 연필을 1개씩 받으면

남학생 2명이 연필 4개를 나누어 가지므로 ${}_2H_4=5$가지

(2) 여학생이 연필을 2개씩 받으면

남학생이 남은 연필을 나누어 가지는 경우는 ${}_2H_1=2$

따라서 남학생과 여학생이 연필을 나누어 갖는 경우는 7가지

(3) 남학생이 볼펜을 1개씩 받으면

여학생이 남은 볼펜을 나누어 가지는 경우는 ${}_3H_2=6$

(4) 남학생이 볼펜을 2개씩 받으면

여학생이 남은 볼펜을 나누어 가지는 경우는 ${}_3H_0=1$

따라서 남학생과 여학생이 볼펜을 나누어 갖는 경우는 7가지

그러므로 조건을 만족하는 경우의 수는 49가지

016

[정답] 218

A, B, C, D가 받는 사인펜의 개수를 각각 a, b, c, d라 하면

$a+b+c+d=14$

조건 (가)를 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는

$a=a'+1$, $b=b'+1$, $c=c'+1$, $d=d'+1$로 놓으면

방정식 $a'+b'+c'+d'=10$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c', d'의 순서쌍 $(a',\ b',\ c',\ d')$의 개수와 같으므로

$${}_4H_{10}={}_{13}C_{10}={}_{13}C_3=\frac{13\times12\times11}{3\times2\times1}=286$$

한편, 네 명의 모두 홀수 개의 사인펜을 받는 경우의 수는

$a=2a''+1$, $b=2b''+1$, $c=2c''+1$, $d=2d''+1$로 놓으면

방정식 $a''+b''+c''+d''=5$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a'', b'', c'', d''의 순서쌍 $(a'',\ b'',\ c'',\ d'')$의 개수와 같으므로

$${}_4H_5={}_8C_5={}_8C_3=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$$

즉 조건 (가)와 조건 (다)를 만족시키는 경우의 수는 $286-56=230$

한편, 조건 (가)와 조건 (다)를 만족시키고, 사인펜을 10개 이상 받은 학생이 있는 경우

각 학생이 받은 사인펜의 개수는 10, 2, 1, 1 뿐이고 이 경우의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$

따라서 모든 조건을 만족시키는 경우의 수는

$230-12=218$

017

[정답] ③

동전을 던져서 앞면과 뒷면이 나오는 확률은 $\frac{1}{2}$로 같다.

상자 B에 들어 있는 공의 개수가 6번째 시행 후 처음으로 8이 되어야 하므로 5번째 시행 후에는 7, 4번째 시행 후에는 6이어야 한다.

4번째 시행 후에 6이 되기 위해서는 앞면과 뒷면이 각각 2번씩 나와야 하고, 첫 번째와 두 번째 모두 앞면이 나오는 경우를 제외해야 하므로 구하는

확률은

$\left\{({}_4C_2-1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^4\right\}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{64}$ 이다.

018

[정답] ⑤

(i) 꺼낸 공의 수가 3일 확률은 $\frac{2}{5}$

세 주사위의 눈의 수의 합이 10인 경우는 순서를 생각하지 않으면

$(6,3,1)$, $(6,2,2)$, $(5,4,1)$, $(5,3,2)$, $(4,4,2)$, $(4,3,3)$

각각의 경우의 수는

$3!$, $\frac{3!}{2!}$, $3!$, $3!$, $\frac{3!}{2!}$, $\frac{3!}{2!}$

이므로 확률은

$\frac{2}{5}\times(3!\times3+3\times3)\times\frac{1}{6^3}=\frac{1}{20}$

(ii) 꺼낸 공의 수가 4일 확률은 $\frac{3}{5}$

네 주사위의 눈의 수의 합이 10인 경우는 순서를 생각하지 않으면

$(6,2,1,1)$, $(5,3,1,1)$, $(5,2,2,1)$, $(4,4,1,1)$, $(4,3,2,1)$, $(4,2,2,2)$, $(3,3,3,1)$, $(3,3,2,2)$

각각의 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}$, $\frac{4!}{2!}$, $\frac{4!}{2!}$, $\frac{4!}{2!2!}$, $4!$, $\frac{4!}{3!}$, $\frac{4!}{3!}$, $\frac{4!}{2!2!}$

이므로 확률은

$\frac{3}{5}\times(12\times3+6\times2+4\times2+24)\times\frac{1}{6^4}=\frac{1}{27}$

이상에서 구하는 확률은 $\frac{1}{20}+\frac{1}{27}=\frac{47}{540}$

019

[정답] 62

문자 B가 보이려면, 카드를 홀수 번 뒤집어야 하므로 다음과 같이 케이스를 구분할 수 있다.

i) 카드를 한 번 뒤집는 경우

동전을 두 개 던지는 시행을 한 번 하여 카드를 뒤집을 확률은 $\frac{1}{4}$, 뒤집지 못할 확률은 $\frac{3}{4}$ 이므로 5번의 시행을 할 때 카드를 한 번 뒤집을 확률은

$\left(\frac{3}{4}\right)^4\times\left(\frac{1}{4}\right)\times\frac{5!}{4!}=\frac{405}{4^5}$ 이다.

ii) 카드를 세 번 뒤집는 경우

카드를 세 번 뒤집을 확률은

$\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\left(\frac{1}{4}\right)^3\times\frac{5!}{2!3!}=\frac{90}{4^5}$ 이다.

iii) 카드를 다섯 번 뒤집는 경우

카드를 세 번 뒤집을 확률은 $\left(\frac{1}{4}\right)^5=\frac{1}{4^5}$ 이다.

i) ~ iii)에 의하여 구하고자하는 확률은 $\frac{496}{4^5}=\frac{62}{2^7}=p$

이고, $128p=62$

020

[정답] 238

B주머니에서 꺼낸 공이 흰 공일 경우는 다음의 두 가지 이므로 확률을 구하면

(i) A주머니에서 흰 공을 꺼내어 B주머니에 넣었을 때 흰 공이 나오는 경우

$\frac{{}_2C_1}{{}_7C_1}\times\frac{{}_4C_1}{{}_8C_1}=\frac{2}{7}\times\frac{4}{8}=\frac{8}{56}$

(ii) A주머니에서 검은 공을 꺼내어 B주머니에 넣었을 때 흰 공이 나오는 경우

$\frac{{}_5C_1}{{}_7C_1}\times\frac{{}_3C_1}{{}_8C_1}=\frac{5}{7}\times\frac{3}{8}=\frac{15}{56}$

따라서, 구하는 확률은

$\frac{(\text{A에서 B로 옮겨진 공이 흰 공일 경우의 수})}{(\text{B에서 꺼낸 공이 흰 공일 확률})}$

$=\frac{\frac{8}{56}}{\frac{8}{56}+\frac{15}{56}}=\frac{8}{23}$

이 때, $p=23$, $q=8$이므로

$10p+q=10\cdot23+8=238$

021

[정답] 50

갑, 을, 병이 뽑은 카드 숫자의 전체 순서쌍 개수

는

$6\times3\times3=54$

갑이 꺼낸 카드의 숫자가 을이 꺼낸 카드의 숫자보다 큰 사건을 사건 A라 하고, 갑이 꺼낸 카드의 숫자가 을과 병이 꺼낸 카드에 적힌 수의 합보다 큰 사건을 사건 B라 하자.

이 때, 사건 A의 경우의 수를 보면

(갑, 을) $=$ $(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3),(5,1),(5,2),(5,3),(6,1),(6,2),(6,3)$

위의 12 가지 경우마다 병이 꺼낸 카드의 숫자가 3 가지씩이므로 $12\times3=36$ 가지이다 .

$\therefore P(A)=\frac{36}{54}=\frac{2}{3}$

사건 $A\cap B$의 경우의 수는

갑	을	병
3	1	1
4	1 1 2	1 2 1
5	1 1 1 2 2 3	1 2 3 1 2 1
6	1 1 1 2 2 2 3 3	1 2 3 1 2 3 1 2

18 가지 이므로 $P(A\cap B)=\frac{18}{54}=\frac{1}{3}$

$$\therefore P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}$$

$k=\frac{1}{2}$, $100k=50$

022

[정답] ④

(i) $(x, y, z)=(6, 1, 2)$인 경우 총 9개의 공을 꺼내므로

전체 경우는 ${}_{12}P_9$이고,

(1) 빨간공을 6개 뽑으므로 ${}_6P_6$

(2) 파란공을 1개 뽑으므로 ${}_3P_1$

(3) 노란공을 2개 뽑으므로 ${}_3P_2$

(4) 뽑은 9개의 공을 나열하는 가짓수 $\frac{9!}{6!2!}$

(1)~(4)에서 경우의 수는 $9\times9!$

이때 ${}_{12}P_9={}_{12}C_9\times9!={}_{12}C_3\times9!$이므로

확률은 $\frac{9}{220}$이다,

(ii) 같은방법으로

$(x, y, z)=(6, 2, 1)$일 확률은 $\frac{9}{220}$

(iii) $(x, y, z)=(6, 2, 2)$인 경우

10번째 시행은 반드시 빨간공이 나오므로

9번째 시행까지 $(x, y, z)=(5, 2, 2)$이다.

$(x, y, z)=(5, 2, 2)$일 확률은 $\frac{27}{110}$이고,

10번째 시행에서 빨간공이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$이므로

$(x, y, z)=(6, 2, 2)$일 확률은 $\frac{9}{110}$이다.

위의 과정에서 구하고자하는 확률은

$$\frac{9}{220}\times2+\frac{9}{110}=\frac{18}{110}=\frac{9}{55}$$

023

[정답] 41

두 번 시행 후 주머니에 흰 공만 2개가 들어 있는 확률은 다음과 같이 분류할 수 있다.

(ⅰ) 첫 번째 시행에 검은 공 3개, 두 번째 시행에 검은 공 1개, 흰색 공 2개를 뽑는 경우

첫 번째 시행 후 남아 있는 공은 검은 공 1개, 흰색 공 2개다.

$$\frac{{}_4C_3}{{}_6C_3}\cdot\frac{{}_1C_1\cdot{}_2C_2}{{}_3C_3}=\frac{1}{5}$$

(ⅱ) 첫 번째 시행에 검은 공 2개, 흰색 공 1개를 뽑고 두 번째 시행에 검은 공 2개, 흰색 공 1개를 뽑는 경우

첫 번째 시행 후 남아 있는 공은 검은 공 2개, 흰색 공 2개다.

$$\frac{{}_4C_2 \cdot {}_2C_1}{{}_6C_3} \cdot \frac{{}_2C_2 \cdot {}_2C_1}{{}_4C_3} = \frac{3}{10}$$

(iii) 첫 번째 시행에 검은 공 1개, 흰색 공 2개를 뽑고, 두 번째 시행에 검은 공 3개를 뽑는 경우

첫 번째 시행 후 남아 있는 공은 검은 공 3개, 흰색 공 2개다.

$$\frac{{}_4C_1 \cdot {}_2C_2}{{}_6C_3} \cdot \frac{{}_3C_3}{{}_5C_3} = \frac{1}{50}$$

따라서 구하고자 하는 확률은

$$\frac{\frac{3}{10}}{\frac{1}{5}+\frac{3}{10}+\frac{1}{50}} = \frac{30}{20+30+2} = \frac{15}{26}$$

따라서 $p=26$, $q=15$이므로 $p+q=41$

024

[정답] 133

정육면체 모양의 상자를 한 번 던져 바닥에 닿은 면에 적혀 있는 수가 각각 1, 2일 확률은 각각 $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$이다.

$a_1+a_2+a_3 > a_4+a_5+a_6$일 사건을 A,

$a_1=a_4=1$일 사건을 B라 하자.

$a_1+a_2+a_3 > a_4+a_5+a_6 \geq 3$

(Ⅰ) $a_1+a_2+a_3=4$인 경우

$a_1+a_2+a_3=4$일 확률은 ${}_3C_1\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)$

$a_4+a_5+a_6=3$일 확률은 ${}_3C_0\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{3^3}$

그러므로 ${}_3C_1\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)\times\frac{1}{3^3}=\frac{6}{3^6}$

(Ⅱ) $a_1+a_2+a_3=5$인 경우

$a_1+a_2+a_3=5$일 확률은 ${}_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2$

$3 \leq a_4+a_5+a_6 \leq 4$일 확률은

${}_3C_0\left(\frac{1}{3}\right)^3+{}_3C_1\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{7}{3^3}$

그러므로 ${}_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{7}{3^3}=\frac{84}{3^6}$

(Ⅲ) $a_1+a_2+a_3=6$인 경우

$a_1+a_2+a_3=6$일 확률은 ${}_3C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3$

$3 \leq a_4+a_5+a_6 \leq 5$일 확률은

${}_3C_0\left(\frac{1}{3}\right)^3+{}_3C_1\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)+{}_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{19}{3^3}$

그러므로 ${}_3C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\frac{19}{3^3}=\frac{152}{3^6}$

(Ⅰ), (Ⅱ), (Ⅲ)에 의하여

$\mathrm{P}(A)=\frac{6}{3^6}+\frac{84}{3^6}+\frac{152}{3^6}=\frac{242}{3^6}$

$a_1=a_4=1$이면 $a_2+a_3 > a_5+a_6 \geq 2$이다.

(ⅰ) $a_1=a_4=1$이고 $a_2+a_3=3$인 경우

$a_1=a_4=1$일 확률은 ${}_2C_0\left(\frac{1}{3}\right)^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2$

$a_2+a_3=3$일 확률은 ${}_2C_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3^2}$

$a_5+a_6=2$일 확률은 ${}_2C_0\left(\frac{1}{3}\right)^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2$

그러므로 $\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{4}{3^2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{4}{3^6}$

(ⅱ) $a_1=a_4=1$이고 $a_2+a_3=4$인 경우

$a_1=a_4=1$일 확률은 ${}_2C_0\left(\frac{1}{3}\right)^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2$

$a_2+a_3=4$일 확률은 ${}_2C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2$

$2 \leq a_5+a_6 \leq 3$일 확률은

${}_2C_0\left(\frac{1}{3}\right)^2+{}_2C_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{5}{3^2}$

그러므로 $\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{5}{3^2}=\frac{20}{3^6}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{4}{3^6}+\frac{20}{3^6}=\frac{24}{3^6}$

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{24}{242}=\frac{12}{121}$

따라서 $p=121$, $q=12$이므로 $p+q=133$

025

[정답] ⑤

$$E(T)=E\left(\frac{a(X-m)}{\sigma}+b\right)=\frac{aE(X)}{\sigma}-\frac{am}{\sigma}+b$$
$$=\frac{am}{\sigma}-\frac{am}{\sigma}+b=b=100$$

$$\sigma(T)=\sigma\left(\frac{a(X-m)}{\sigma}+b\right)=\frac{|a|\sigma(X)}{\sigma}$$

$$=\frac{|a|\sigma}{\sigma}=|a|=20$$

$\therefore\ a=20\ (\because a>0)\quad \therefore\ a+b=120$

026

[정답] ⑤

(i) $X=3$인 사건은

주머니에 무게가 2인 추 3개가 들어 있는 경우이므로

$$P(X=3)=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\boxed{\frac{8}{27}}$$

(ii) $X=4$인 사건은

세 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 4이고 네 번째 시행에서 무게가 2인 추를 넣는 경우와 세 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 5인 추를 넣는 경우로 나눌 수 있다. 그러므로

$$P(X=4)={}_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)\times\frac{2}{3}+{}_3C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$P(X=4)=\boxed{\frac{4}{27}}+{}_3C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

(iii) $X=5$인 사건은

네 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 4이고 다섯 번째 시행에서 무게가 2인 추를 넣는 경우와 네 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 5인 경우로 나눌 수 있다. 그러므로

$$P(X=5)={}_4C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^0\times\frac{2}{3}+{}_4C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1$$

$$P(X=5)={}_4C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^0\times\frac{2}{3}+\boxed{\frac{8}{81}}$$

(iv) $X=6$인 사건은

다섯 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 5인 경우이므로

$$P(X=6)=\left(\frac{1}{3}\right)^5$$

이상에서

$$E(X)=\frac{8}{27}\times3+\frac{16}{27}\times4+\frac{26}{243}\times5+\frac{1}{243}\times6$$

$$=\frac{8\times3\times9+16\times4\times9+26\times5+6}{243}=\frac{928}{243}$$

이므로 $243\times E(X)=928$

027

[정답] 23

주머니에서 임의로 꺼낸 한 개의 공에 적혀 있는 수를 확률변수 Y라 할 때, 확률변수 Y의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

Y	1	2	3	4	합계
$P(Y=y)$	a	b	c	d	1

$X=4$인 경우는 4개의 수가 모두 1이어야 하므로

$P(X=4)=a^4$

$a^4=\frac{1}{81}$에서 $0\le a\le1$이므로 $a=\frac{1}{3}$

$X=16$인 경우는 4개의 수가 모두 4이어야 하므로

$P(X=16)=d^4$

$16d^4=\frac{1}{81}$에서 $0\le d\le1$이므로 $d=\frac{1}{6}$

$a+b+c+d=1$이므로

$b+c=\frac{1}{2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

확인한 4개의 수의 표본평균을 $\overline{Y}$라 하면 $X=4\overline{Y}$이다.

$E(X)=E(4\overline{Y})=4E(\overline{Y})=4E(Y)$

$=4\left(\frac{1}{3}+2b+3c+\frac{4}{6}\right)=4(1+2b+3c)$

$E(X)=9$에서 $4(1+2b+3c)=9$이므로

$2b+3c=\frac{5}{4}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $b=\frac{1}{4}$, $c=\frac{1}{4}$

$V(X)=V(4\overline{Y})=16V(\overline{Y})=4V(Y)$

$=4[E(Y^2)-\{E(Y)\}]$

$=4\left\{\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{4}+\frac{9}{4}+\frac{16}{6}\right)-\left(\frac{9}{4}\right)^2\right\}$

$=4\left(\frac{25}{4}-\frac{81}{16}\right)=\frac{19}{4}$

따라서 $p=4$, $q=19$ 이므로 $p+q=23$

028

[정답] ⑤

주머니 A 에서 나올 수 있는 두 수의 차는 1 두개, 2 하나이고, 주머니 B 에서 나올 수 있는 두 수의 차는 1 세개, 2 두개, 3 하나이다. 따라서 다음과 같이 경우를 나누어 생각해볼 수 있다.

i) 주머니 A 에서 꺼내는 시행이 두번 일어날 경우

주머니 A 를 선택하게 될 확률은 $\frac{1}{3}$ 이고, $P(\overline{X})=2$ 이려면 주머니 A 에서 꺼낸 두 수의 차가 항상 2 여야 한다. 따라서 이 조건을 만족하는 확률은

$$\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{81}$$

ii) 주머니 B 에서 꺼내는 시행이 두번 일어날 경우

주머니 B 를 선택하게 될 확률은 $\frac{2}{3}$ 이고, $P(\overline{X})=2$ 이려면 주머니 B 에서 꺼낸 두 수의 차가 두번 연속 2 이거나 한번은 1, 한번은 3 이어야 한다. 따라서 이 조건을 만족하는 확률은

$$\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}\right)\times 2=\frac{10}{81}$$

iii) 주머니 A, B 에서 꺼내는 시행이 각각 한 번 일어날 경우 주머니 A, B 에서 꺼낸 두 수의 차가 모두 2 이거나 주머니 A, B 에서 꺼낸 두 수의 차가 각각 1, 3 이므로 이 조건을 만족하는 확률은

$$\left\{\left(\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}\right)\right\}\times 2=\frac{8}{81}$$

i) ~ iii)에 의해 구하고자 하는 확률은

$$\frac{1+10+8}{81}=\frac{19}{81}$$

029

[정답] ②

$0\le x\le 2$ 에서 $f(x)=kx$ 의 그래프와 x 축 사이의 넓이가 1 이어야 하므로 $2k=1$ $\therefore k=\frac{1}{2}$

$\therefore P(0\le X\le k)=P\left(0\le X\le \frac{1}{2}\right)=\frac{1}{16}$

030

[정답] 10

$P(0\le X\le a)=\frac{1}{2}ab=1$

$\therefore ab=2$ …… ㉠

(i) $0<a\le 4$일 때

$P\left(0\le X\le \frac{a}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\left(\frac{b}{2}\cdot\frac{a}{2}\right)=\frac{b}{2}$

㉠에 의해 $\frac{a}{8}=\frac{b}{2}$ $\therefore a=4b$

㉠에서 $4b^2=2$ $\therefore b=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore a=2\sqrt{2}$

$\therefore a^2+4b^2=8+2=10$

(ii) $a>4$일 때

$P\left(0\le X\le \frac{a}{2}\right)>\frac{1}{2}$ 여야 하나, $ab=2$ 이므로 $b<\frac{1}{2}$ 이다. 따라서 이는 부적합하다.

031

[정답] 10

$P(0\le X\le 3)=1$이어야 하므로

$P(0\le X\le 3)=3a=1$ $\therefore a=\frac{1}{3}$

$\therefore P(0\le X<a)=P\left(0\le X<\frac{1}{3}\right)$

$=P(0\le X\le 3)-P\left(\frac{1}{3}\le X\le 3\right)$

$=1-\frac{1}{3}\times\frac{8}{3}=\frac{1}{9}$

$\therefore p+q=10$

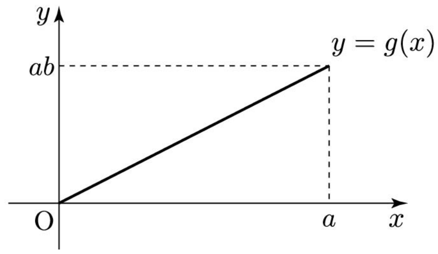
032

[정답] 5

확률밀도함수의 성질에 의하여

$P(0\le X\le a)=1$ 에서 $ab=1$ … ㉠

$g(x)=P(0\le X\le x)=bx$



확률밀도함수의 성질에 의하여

$P(0 \le Y \le a) = \frac{1}{2} \times a \times ab = \frac{a^2 b}{2} = 1$ … ㉡

두 식 ㉠, ㉡을 연립하면 $a = 2$, $b = \frac{1}{2}$

그러므로 $g(x) = \frac{1}{2}x$ 에서

$P(0 \le Y \le c) = \frac{1}{2} \times c \times \frac{c}{2} = \frac{c^2}{4} = \frac{1}{2}$, $c^2 = 2$

따라서 $(a+b) \times c^2 = \left(2 + \frac{1}{2}\right) \times 2 = 5$

033

[정답] ④

$P(0 \le X \le a) = 1$이므로 확률변수 X의 확률밀도함수의 그래프로부터

$\frac{1}{2}ac = 1$, 즉 $ac = 2$

한편,

$P(0 \le X \le a) = P(X \le b) + P(X \ge b) = 1$ 이고

$P(X \le b) - P(X \ge b) = \frac{1}{4}$ 이므로

$P(X \le b) = \frac{5}{8}$이고 $P(X \ge b) = \frac{3}{8}$이다.

따라서 확률변수 X의 확률밀도함수의 그래프로부터

$\frac{1}{2} \times b \times c = \frac{5}{8}$

이다. 한편, $P(X \le b) > \frac{1}{2}$이므로 $0 < \sqrt{5} < b$이다. 이때 두 점 (0, 0), (b, c)를 지나는 직선의 방정식은

$y = \frac{c}{b}x$

이므로 $P(X \le \sqrt{5}) = \frac{1}{2}$에서

$\frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \left(\frac{c}{b} \times \sqrt{5}\right) = \frac{5c}{2b} = \frac{1}{2}$

즉, $b = 5c$이다.

이때 $bc = 5c^2 = \frac{5}{4}$이므로

$c = \frac{1}{2}$ $(\because c > 0)$

따라서 $b = \frac{5}{2}$, $a = 4$이므로

$a + b + c = 4 + \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 7$

034

[정답] ④

확률변수 X, Y는 각각 정규분포 $N(0, a^2)$, $N(0, b^2)$을 따르므로 각각 $Z = \frac{X}{a}$, $Z = \frac{Y}{b}$로 표준화하면 모두 표준정규분포를 따른다.

ㄱ. 확률변수X의 평균은 0이므로

$P(1 \le X \le 2) > P(2 \le X \le 3)$ (거짓)

ㄴ. $P(-a \le X \le 0) = P(-1 \le Z \le 0)$

$= P(0 \le Z \le 1)$

$P(0 \le Y \le b) = P(0 \le Y \le 1)$

$\therefore P(-a \le X \le 0) = P(0 \le Y \le 1)$ (참)

ㄷ. $P(-1 \le X \le 1) = 2P(0 \le X \le 1)$

$= 2P\left(0 \le Z \le \frac{1}{a}\right)$

$P(-2 \le Y \le 2) = 2P(0 \le Y \le 2)$

$= 2P\left(0 \le Z \le \frac{2}{b}\right)$

따라서 $\frac{1}{a} = \frac{2}{b}$에서 $b = 2a$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

035

[정답] 62

조건 (가)에서 $f(10) > f(20)$이므로 $m < 15$이어야 한다.

조건 (나)에서 $f(4) < f(22)$이므로 $m > 13$이어야 한다.

$13 < m < 15$에서 자연수 $m = 14$

$P(17 \le X \le 18)$

$= P\left(\frac{17-14}{5} \le Z \le \frac{18-14}{5}\right)$

$= P(0.6 \le Z \le 0.8)$

$= 0.288 - 0.226 = 0.062$

따라서 $1000a = 0.062 \times 1000 = 62$

036

[정답] ⑤

조건 (가)에서 $Y = 3X - a$이므로

$E(Y) = E(3X - a) = 3E(X) - a = 3m - a$

$m = 3m - a$에서 $a = 2m$

$\sigma(Y) = \sigma(3X - a) = 3\sigma(X) = 6$

$P(X \le 4) = P\left(Z \le \dfrac{4-m}{2}\right)$

$P(Y \ge a) = P(Y \ge 2m) = P\left(Z \ge \dfrac{m}{6}\right)$

조건 (나)에 의하여

$\dfrac{4-m}{2} = -\dfrac{m}{6}$에서 $m = 6$

그러므로 확률변수 Y는 정규분포 $N(6,\ 6^2)$을 따른다.

따라서

$P(Y \ge 9) = P\left(Z \ge \dfrac{9-6}{6}\right) = P(Z \ge 0.5)$

$= P(Z \ge 0) - P(0 \le Z \le 0.5)$

$= 0.5 - 0.1915 = 0.3085$

037

[정답] ①

$f(a) = f(3a)$이므로 $E(X) = 2a$이고,

$g(2a) = f(a)$, $P(Y \le 2a) > 0.5$이므로 $E(Y) = a$

이다. 이때, 확률변수 Y의 표준편차를 σ라 하면,

$P(Y \le 2a) = P\left(\dfrac{Y-a}{\sigma} \le \dfrac{a}{\sigma}\right) = P(Z \le 0.5)$이므로

$a = 2\sigma$이다.

이때, $V(X) = V(Y)$이므로 확률변수 X의 표준편차 또한 σ이고, 따라서

$P(0 \le X \le 3a) = P\left(\dfrac{-2a}{\sigma} \le Z \le \dfrac{a}{\sigma}\right)$

$= P(-1 \le Z \le 0.5)$

$= 0.341 + 0.1915 = 0.5328$

038

[정답] ②

X를 자율학습실 이용시간이라 하면 X는 정규분포 $N(m,\ 5^2)$을 따른다.

표본의 크기 $n = 25$이므로

$a = 1.96 \times \dfrac{5}{\sqrt{25}} = 1.96$이고

$\overline{x_1} = 80$, $\overline{x_2} = \dfrac{15}{16} \times 80 = 75$

따라서

$1.96\dfrac{5}{\sqrt{n}} = \dfrac{5}{7} \times 1.96$, $n = 49$

$\therefore\ n + \overline{x_2} = 49 + 75 = 124$

039

[정답] ②

전기 자동차 100대를 임의추출하여 얻은 1회 충전 주행 거리의 표본평균이 $\overline{x_1}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$\overline{x_1} - 1.96 \times \dfrac{\sigma}{\sqrt{100}} \le m \le \overline{x_1} + 1.96 \times \dfrac{\sigma}{\sqrt{100}}$

$\overline{x_1} - 1.96 \times \dfrac{\sigma}{10} \le m \le \overline{x_1} + 1.96 \times \dfrac{\sigma}{10}$

전기 자동차 400대를 임의추출하여 얻은 1회 충전 주행 거리의 표본평균이 $\overline{x_2}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$\overline{x_2} - 2.58 \times \dfrac{\sigma}{\sqrt{400}} \le m \le \overline{x_2} + 2.58 \times \dfrac{\sigma}{\sqrt{400}}$

$\overline{x_2} - 2.58 \times \dfrac{\sigma}{20} \le m \le \overline{x_2} + 2.58 \times \dfrac{\sigma}{20}$

이때, $a = c$에서

$\overline{x_1} - 1.96 \times \dfrac{\sigma}{10} = \overline{x_2} - 2.58 \times \dfrac{\sigma}{20}$

이고 $\overline{x_1} - \overline{x_2} = 1.34$이므로

$\overline{x_1} - \overline{x_2} = 1.96 \times \dfrac{\sigma}{10} - 2.58 \times \dfrac{\sigma}{20}$

$= 0.67 \times \dfrac{\sigma}{10} = 1.34$

$\sigma = \dfrac{1.34 \times 10}{0.67} = 20$

따라서

$b-a=2\times 1.96\times \frac{\sigma}{10}$

$=2\times 1.96\times 2$

$=7.84$

040

[정답] ④

주머니에 있는 모든 구슬을 서로 다른 세 상자에 나누어 담을 때, 상자 B에 들어있는 흰 구슬의 개수가 1인 사건을 E, 상자 C에 들어있는 모든 구슬에 적혀있는 숫자의 합이 4보다 크거나 같은 사건을 F라 할때, 구하고자 하는 확률은

$\mathrm{P}(F|E)=\frac{\mathrm{P}(F\cap E)}{\mathrm{P}(E)}$

이다. 이때, 다음 두 가지 경우로 나누어 살펴볼 수 있다.

(i) 상자 A에 담겨있는 검은 구슬의 개수가 3인 경우

상자 C에 들어있는 모든 구슬에 적혀있는 숫자의 합이 4보다 크거나 같을 확률은 상자 C에 들어있는 모든 구슬에 적혀있는 숫자의 합이 3보다 작거나 같을 확률을 1에서 뺀 값과 같다.

따라서 상자 C에 들어있는 모든 구슬에 적혀있는 숫자의 합이 3보다 작거나 같을 확률을 구해보면, 상자 A에 담겨있는 검은 구슬의 개수가 3이면서 상자 B에 들어있는 흰 구슬의 개수가 1이기 위해 먼저 상자 A에 검은 구슬 3개를 담은 다음 나머지 검은 구슬 3개를 상자 B 또는 C에 중복을 허용하여 담고, 나머지 흰 구슬 2개를 상자 A 또는 C에 중복을 하용하여 담아야 하므로 이 경우의 수는

${}_6C_3\times\left(2^3\times{}_2H_2-1^3\times{}_1H_2\right)=23\times 20=460$

이다. 이때, 상자 C에 들어있는 모든 구슬에 적혀있는 숫자의 합이 3보다 작거나 같기 위해선 상자 C에 흰 구슬이 하나만 들어가거나, 1, 2, 3 중 하나가 적힌 검은 구슬이 하나만 들어가거나, 1과 2가 적힌 검은 구슬이 모두 들어가야 한다.

따라서 이 경우의 수는

${}_6C_3\times{}_3C_3\times{}_1H_2+3\times{}_5C_3\times{}_2C_2\times{}_1H_2+{}_4C_3\times{}_1C_1\times{}_1H_2$

$=20+30+4=54$

이며, 따라서 상자 C에 들어있는 모든 구슬에 적혀있는 숫자의 합이 4보다 크거나 같은 경우의 수는

$460-54=406$

(ii) 상자 A에 담겨있는 검은 구슬의 개수가 4인 경우

상자 A에 담겨있는 검은 구슬의 개수가 4이면서 상자 B에 들어있는 흰 구슬의 개수가 1이기 위해 먼저 상자 A에 검은 구슬 4개를 담은 다음 나머지 검은 구슬 2개를 상자 B 또는 C에 중복을 허용하여 담고, 나머지 흰 구슬 2개를 상자 A 또는 C에 중복을 하용하여 담아야 하므로 이 경우의 수는

${}_6C_4\times\left(2^2\times{}_2H_2-1^3\times{}_1H_2\right)=15\times 11=165$

이다. 이때, 상자 C에 들어있는 모든 구슬에 적혀있는 숫자의 합이 3보다 작거나 같기 위해선 상자 C에 흰 구슬이 하나만 들어가거나, 1, 2, 3 중 하나가 적힌 검은 구슬이 하나만 들어가거나, 1과 2가 적힌 검은 구슬이 모두 들어가야 한다.

따라서 이 경우의 수는

${}_6C_4\times{}_2C_2\times{}_1H_2+3\times{}_5C_4\times{}_1C_1\times{}_1H_2+{}_4C_4\times{}_1C_1\times{}_1H_2$

$=15+15+1=31$

이며, 따라서 상자 C에 들어있는 모든 구슬에 적혀있는 숫자의 합이 4보다 크거나 같은 경우의 수는

$165-31=134$

(i), (ii)에 의해 $\mathrm{P}(F|E)=\frac{134+406}{165+460}=\frac{540}{625}=\frac{108}{125}$

따라서 구하고자 하는 확률은 $\frac{108}{125}$이다.