20. $(-1,1)$에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음을 만족한다.

(가) $f(x)=f(x+2)$
(나) $\{f(x)\}^2=\dfrac{2}{\pi}f'(x)-1$
(다) $f(\dfrac{1}{2})=1, f(0)=0$

$a_k=\int_{2k}^{2(k+\frac{1}{4})}f(x)dx$라고 정의 할 때, $e^{\sum_{k=1}^{5}\pi a_k}$의 값은? [4점]

$$\sum_{k=1}^{5}\pi a_k$$

$$=\pi\left\{\int_2^{2+\frac{1}{2}}f(x)dx+\int_4^{4+\frac{1}{2}}f(x)dx+\int_6^{6+\frac{1}{2}}f(x)dx+\int_8^{8+\frac{1}{2}}f(x)dx+\int_{10}^{10+\frac{1}{2}}f(x)dx\right\}$$

$$=5\pi\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)dx\left\{\because\int_{n+1}^{n}f(x)dx=\int_{n+1+2k}^{n+2k}f(x)dx, k\text{는 정수, (가)조건}\right\}$$

조건 (나) $\{f(x)\}^2=\dfrac{2}{\pi}f'(x)-1$를 x에 대해 미분하면

$$2f(x)f'(x)=\frac{2}{\pi}f''(x)\cdots ①$$

$$\pi f(x)=\frac{f''(x)}{f'(x)}\cdots ②$$ 이다.

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\pi f(x)dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{f''(x)}{f'(x)}dx$$

$$\pi\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)dx=\left[\ln|f'(x)|\right]_0^{\frac{1}{2}}=\ln\left|f'(\frac{1}{2})\right|-\ln|f'(0)|=\ln\pi-\ln\frac{\pi}{2}=\ln 2$$

$$\begin{bmatrix}\left\{f(\frac{1}{2})\right\}^2=\frac{2}{\pi}f'(\frac{1}{2})-1 & \rightarrow & f'(\frac{1}{2})=\pi \\ \{f(0)\}^2=\frac{2}{\pi}f'(0)-1 & \rightarrow & f'(0)=\frac{\pi}{2}\end{bmatrix}\quad \therefore \sum_{k=1}^{5}\pi a_k=5\pi\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)dx=5\ln 2$$

① $f'(x)$를 미분할 수 있는 이유

조건(나) $\{f(x)\}^2 = \dfrac{2}{\pi}f'(x) - 1$로부터 $f'(x) = \dfrac{\pi}{2}\left[\{f(x)\}^2 + 1\right]$이다.

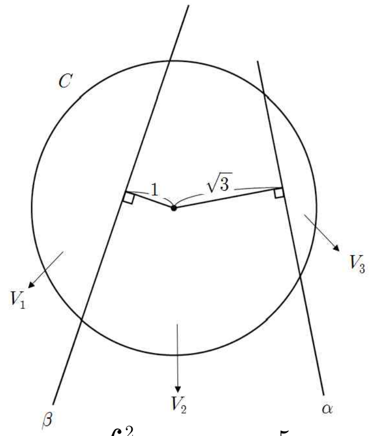
$f(x)$는 $f'(x)$를 가지는데, 즉 미분할 수 있다는 말이므로, $f(x)$의 곱과 상수항의 덧셈, 상수의 곱으로 이루어진 $f'(x)$도 미분할 수 있다.

② $f'(x)$가 0이 아닌 이유

조건(나) $\{f(x)\}^2 = \dfrac{2}{\pi}f'(x) - 1$에서 $f(x)$는 실수이므로 $\{f(x)\}^2 \geq 0$이다.

$\therefore f'(x) = \dfrac{\pi}{2}\left[\{f(x)\}^2 + 1\right] \geq \dfrac{\pi}{2}$이므로 $f'(x)$로 식을 나눌 수 있다.

21. 원점 O를 중심으로 하는 구 $C: x^2+y^2+z^2=4$가 있다. 구 C가 두 평면 $\alpha: x+y+z-3=0$, $\beta: 3x+4y+5=0$에 의해 세 부분으로 나뉜다. 이 세 부분의 부피비를 큰 것부터 $a:5:b$라고 할 때, 점 $P(a+b, 18, 9\sqrt{3})$와 점 O를 이은 선분 $\overline{OP}$가 구 C와 만나는 점은 $M(p,q,r)$이다. $\overline{MP}+(2p)^2+(\sqrt{3}q)^2+(2r)^2$의 값은?



원점 O에서 평면 β까지의 거리는 1이고
원점 O에서 평면 α까지의 거리는 $\sqrt{3}$이다.

V_1의 부피는 평면에서 $x^2+y^2=4$의 그래프를 $x=1$에서 $x=2$까지 x축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피이다.

$\therefore V_1 = \pi\int_1^2 4-x^2\,dx = \frac{5}{3}\pi$

이와 같은 방법으로

$$V_3 = \pi\int_{\sqrt{3}}^2 4-x^2\,dx = (\frac{16}{3}-3\sqrt{3})\pi$$

구 C의 부피가 $\frac{4}{3}\pi\times 2^3 = \frac{32}{3}\pi$이므로

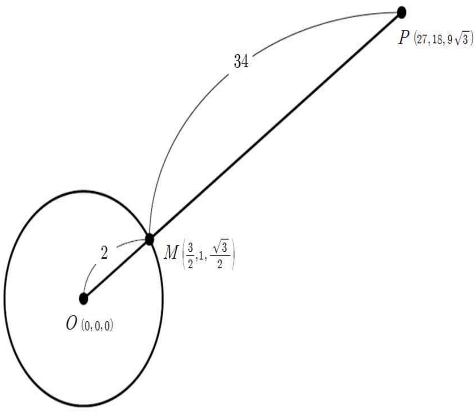
$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{32}{3}\pi-(V_1+V_3) \\ &= \frac{32}{3}\pi-(\frac{21}{3}-3\sqrt{3})\pi \\ &= (\frac{11}{3}+3\sqrt{3})\pi \end{aligned}$$

$V_2 > V_1 > V_3$이므로

$$(\frac{11}{3}+3\sqrt{3})\pi : \frac{5}{3}\pi : (\frac{16}{3}-3\sqrt{3})\pi = 11+9\sqrt{3} : 5 : 16-9\sqrt{3}$$

$\therefore a = 11+9\sqrt{3},\ b = 16-9\sqrt{3}$

$P(27, 18, 9\sqrt{3})$이므로 $\overline{OP}=36$이고, $\overline{OM}$은 구 C의 반지름이므로 $\overline{OM}=2$



따라서 점 M은 선분 $\overline{OP}$를 $1:17$로 내분하는 점이다.

$$\therefore M\left(\frac{27}{1+17}, \frac{18}{1+17}, \frac{9\sqrt{3}}{1+17}\right) = M\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\therefore p = \frac{3}{2}, q = 1, r = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\overline{MP} = \overline{OP} - \overline{OM} = 34$

$\overline{MP} + (2p)^2 + (\sqrt{3}\,q)^2 + (2r)^2 = 34 + 9 + 3 + 3 = 49$

23. $(x+3)^{x^2}=(x+3)^{-x+6}$**의 모든 근의 합을** a**라고 하자. 이때,** $-a$**의 값은? [3점]**

먼저, 양변의 $x+3$을 0이 되게 만들어주는 -3이 가능합니다.

또한, 지수가 같아야 하므로 $x^2=-x+6$의 2차 방정식을 풀어준다면, 2와 -3이 가능합니다.

이 부분까지는 쉽게 하실 수 있습니다. 나머지가 문제인데요. 다음 부분이 중요하다기 보다는 한번 쯤 기억해두자 라는 의도로 낸 문제입니다.

<u>양변의 밑이 1과 −1이 될 때를 생각 하셔야 됩니다</u>. 양변의 밑이 1일 때, $x=-2$이고, 이때 등식은 성립합니다. 또한, 양변의 밑이 −1일 때, $x=-4$이고, 각 지수 부분이 양수 이므로, 등식이 성립합니다.

그러므로 등식의 모든 근은 2, −3, −2, −4 이므로 모든 근의 합 a는 −7, $-a$의 값은 7이 됩니다.

26. 평면 $3x+7y-5z=10$과 직선 $x-1=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z+4}{5}$의 교점 (a,b,c)를 지나고 점 (8,−2,0) 을 중심으로 하는 원의 넓이를 $d\pi$라고 할 때, $a+b+c+d$의 값은? [4점]

직선 $x-1=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z+4}{5}$위의 임의의 한 점 $A(t+1, 2t-3, 5t-4)$가 평면 $3x+7y-5z=10$위에 있으므로,

$3(t+1)+7(2t-3)-5(5t-4)=10$이 성립하므로, $\therefore t=-1$ 임을 알 수 있다.

교점 $A(a,b,c)=(0,\,-5,\,-9)$가 된다.

$(8,\,-2,0)$이 중심이고 $(0,\,-5,\,-9)$을 지나는 원의 넓이는

$\pi(8-0)^2+(-2+5)^2+(0+9)^2=154\pi$ 이므로 d는 154 임을 알 수 있으므로,

$a+b+c+d=0+(-5)+(-9)+154=140$ 이 된다.

29. 자연수 n에 대하여 $\log_2 n$의 정수부분을 $f(n)$, 소수 부분을 $g(n)$이라고 하고, $\left|x^2+2f(n)x-g(n)\right|=\{f(n)\}^2$의 서로 다른 실근의 개수를 a_n이라고 한다. 이때, $\sum_{n=1}^{50} a_n$의 값은? [4점]

이차함수 그래프의 개형을 이용해 보자.

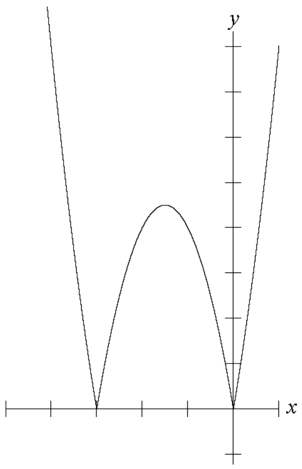
$\log_2 n = f(n)+g(n)$ 이고, n이 2의 거듭제곱으로만 이루어진 경우 $g(n)$은 0이 된다.
따라서 이를 기준으로 경우를 나누어보면

1) $g(n)=0$인 경우

$g(n)=0$이므로 $\left|x^2+2f(n)x-g(n)\right|=f(n)^2$를 다시 쓰면 $\left|x^2+2f(n)x\right|=f(n)^2$가 된다.

따라서
$y=\left|x^2+2f(n)x\right|$과 $y=\{f(n)\}^2$의 교점을 찾는 것 과 동치이다

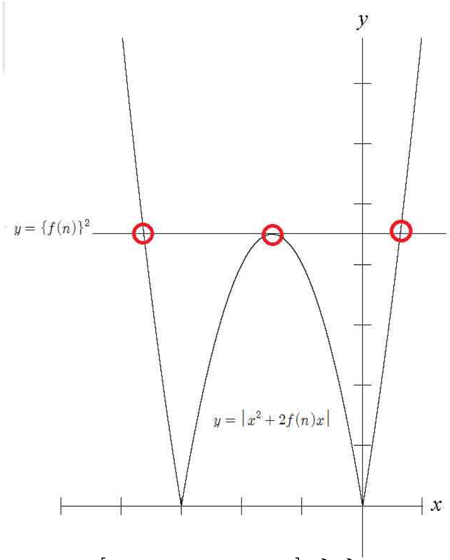
$y=\left|x^2+2f(n)x\right|$의 그래프는 다음과 같다.



이때 $y=\left|x^2+2f(n)x\right|$의 극댓값은 $y=-x^2-2f(n)x$의 최댓값과 같으므로

$$\begin{aligned} y&=-x^2-2f(n)x \\ &=-(x^2+2f(n)x+f(n)^2-f(n)^2) \\ &=-(x^2+2f(n)x+f(n)^2)+f(n)^2 \\ &=-(x+f(n))^2+\{f(n)\}^2 \end{aligned}$$

가 되어
$y=\left|x^2+2f(n)x\right|$와 $y=\{f(n)\}^2$의 교점은 그림과 같이 3개가 된다.



$a_n=3\ \ [n=2,4,8,16,32]$이다

<u>2) $g(n)\neq 0$인 경우</u>

2−1) $n=1$ 인 경우

$\log_2 1=0$이므로 $f(1)=0,\ g(1)=0$이다

그 결과 준식은 $|x^2|=0$이 되어 서로다른 실근은 1개이다 따라서 $a_1=1$이다

2−2) $n\neq 1$ 인 경우

$|x^2+2f(n)x-g(n)|=f(n)^2$ 역시 $y=|x^2+2f(n)x-g(n)|$와 $y=f(n)^2$의 교점을 찾는 것과 동치이다.

$0<g(n)<1$이므로 $y=|x^2+2f(n)x-g(n)|$의 그래프는

$y=x^2+2f(n)x-g(n)$그래프와 $y=-x^2-2f(n)x+g(n)$ 그래프를 이용해 그린다.

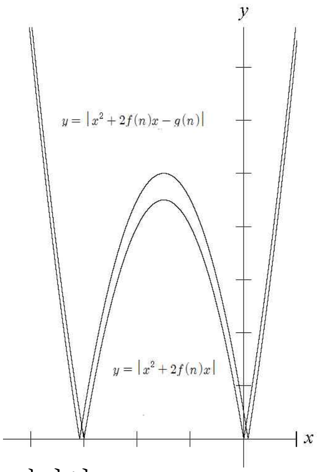
이때 $y=x^2+2f(n)x-g(n)$와 $y=-x^2-2f(n)x+g(n)$는 $y=x^2+2f(n)x$와

$y=-x^2-2f(n)x$를 각각 $g(n)$의 크기만큼 y축 방향으로 평행 이동한 것이다.

따라서

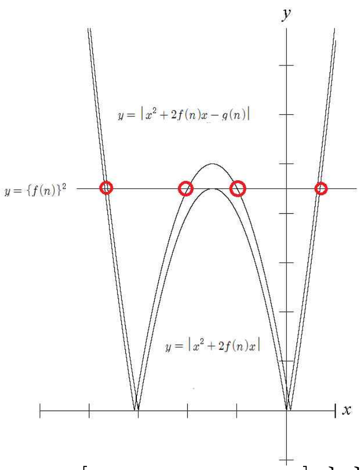
$y=|x^2+2f(n)x-g(n)|$의 극댓값은 $y=|x^2+2f(n)x|$의 극댓값보다 커지게 된다.

$y=\left|x^2+2f(n)x-g(n)\right|$의 그래프는 다음과 같다.



따라서

$y=\left|x^2+2f(n)x-g(n)\right|$와 $y=\{f(n)\}^2$의 교점은 그림과 같이 4개가 된다.



$a_n=4\ \ [n\neq 1,2,4,8,16,32]$이다.

$\sum_{1}^{50} a_n = 1\times 1+3\times 5+4\times 44=192$