25

함수

$$f(x)=x^3-3px^2+q$$

가 다음 조건을 만족시키도록 하는 25 이하의 두 자연수 p, q의 모든 순서쌍 (p, q)의 개수를 구하시오. [4점] 14

(가) 함수 $|f(x)|$가 $x=a$에서 극대 또는 극소가 되도록 하는 모든 실수 a의 개수는 5이다.
(나) 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 함수 $|f(x)|$의 최댓값과 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 함수 $|f(x)|$의 최댓값은 같다.

$f(x)$의 극댓값은 양수, 극솟값은 음수

$f'(x)=3x^2-6px$
$=3x(x-2p)$
극대: $f(0)=q$
극소: $f(2p)=q-4p^3$ $(\because p>0)$

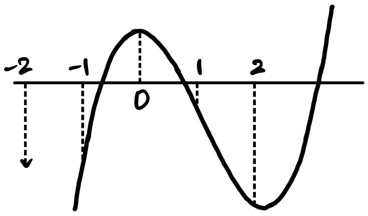
$\longrightarrow q-4p^3<0$
$\longrightarrow q<4p^3$

$f(-1)=-1-3p+q$
$f(1)=1-3p+q$
$\longrightarrow f(0)>f(1)>f(-1)$

$f(-2)=-8-12p+q$
$f(2)=8-12p+q$
$\longrightarrow f(0)>f(2)>f(-2)$

25

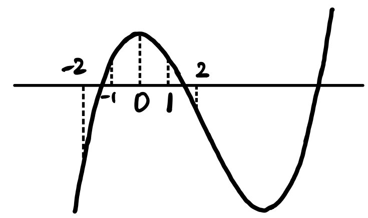
i) $[-1, 1]$에서 함수 $|f(x)|$의 최댓값 $= |f(-1)|$



$\longrightarrow |f(-2)| = [-2, 2]$에서 함수 $|f(x)|$의 최댓값

$\longrightarrow$ 같지 않음. 모순

ii) $[-1, 1]$에서 함수 $|f(x)|$의 최댓값 $= |f(0)|$



$\longrightarrow$ (나)가 성립하려면 : $|f(-2)| \le |f(0)|$

$\longrightarrow 8 + 12p - q \le q$

$4 + 6p \le q$

$4 + 6p \le q < 4p^3 \quad (\because q < 4p^3)$

$p=1 \longrightarrow 10 \le q < 4$ X

$p=2 \longrightarrow 16 \le q < 32 \longrightarrow 16 \le q \le 25$ 10개

$p=3 \longrightarrow 22 \le q < 108 \longrightarrow 22 \le q \le 25$ 4개

$p=4 \longrightarrow 28 \le q < 256$ X

$\therefore$ 14개