타짜

: 기출 밑장배기

수2

저자 소개 | 베이즈(Bayes)
University of Illinois at Chicago ′26
Computer Science (4년 장학생)

Contents | 책의 순서

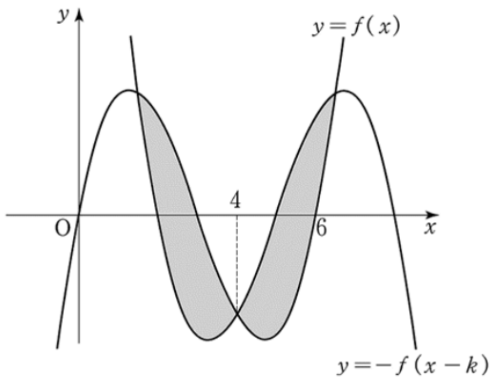
01

2006학년도 9월 평가원(가형) 20번

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $y=f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)=f(6)=0$
(나) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=-f(x-k)$의 그래프가 서로 다른 세 점 $(\alpha, f(\alpha))$, $(\beta, f(\beta))$, $(\gamma, f(\gamma))$ (단, $\alpha<\beta<\gamma$)에서 만나면 k의 값에 관계없이 $\int_{\alpha}^{\gamma}\{f(x)+f(x-k)\}dx=0$이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=-f(x-k)$의 그래프가 다음 그림과 같이 서로 다른 세 점에서 만나고 가운데 교점의 x좌표의 값이 4일 때, $\int_{0}^{k}f(x)dx$의 값을 구하시오. [4점]



02

2010학년도 6월 평가원(가형) 24번

사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\dfrac{f'(5)}{f'(3)}$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극값을 갖는다. (나) 함수 $\lvert f(x)-f(1)\rvert$은 오직 $x=a\,(a>2)$에서만 <u>미분가능하지 않다.</u>

03

2010학년도 9월 평가원(가형) 24번

다음 조건을 만족시키는 모든 사차함수 $y=f(x)$의 그래프가 항상 지나는 점들의 y좌표의 합을 구하시오. [4점]

(가) $f(x)$의 최고차항의 계수는 1이다. (나) 곡선 $y=f(x)$가 점 $(2, f(2))$에서 직선 $y=2$에 접한다. (다) $f'(0)=0$

04 2011학년도 수능(가형) 24번

최고차항의 계수가 1이고, $f(0)=3$, $f'(3)<0$인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 집합 S를

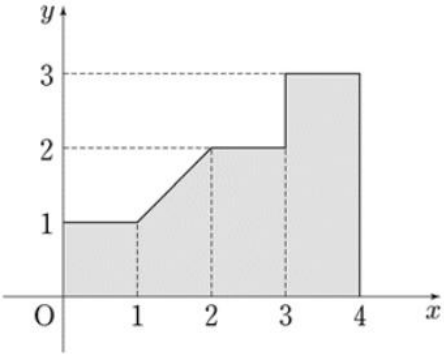
$$S=\{a \mid \text{함수 } |f(x)-t| \text{가 } x=a\text{에서 } \underline{\text{미분가능하지 않다.}}\}$$

라 하고, 집합 S의 원소의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=3$과 $t=19$에서만 불연속일 때, $f(-2)$의 값을 구하시오. [4점]

05

2014학년도 수능 예비시행(A형) 21번

좌표평면 위에 그림과 같이 어두운 부분을 내부로 하는 도형이 있다. 이 도형과 네 점 $(0, 0)$, $(t, 0)$, (t, t), $(0, t)$를 꼭짓점으로 하는 정사각형이 겹치는 부분의 넓이를 $f(t)$라 하자.



열린 구간 $(0, 4)$에서 함수 $f(t)$가 미분가능하지 <u>않은</u> 모든 t의 값의 합은? [4점]

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

06

2014학년도 9월 평가원(A형) 21번

사차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x)=(x+1)(x^2+ax+b)$$

이다. 함수 $y=f(x)$가 구간 $(-\infty, 0)$에서 감소하고 구간 $(2, \infty)$에서 증가하도록 하는 실수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 a^2+b^2의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M+m$의 값은? [4점]

① $\frac{21}{4}$ ② $\frac{43}{8}$ ③ $\frac{11}{2}$

④ $\frac{45}{8}$ ⑤ $\frac{23}{4}$

07

최고차항의 계수가 1인 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 값은? [4점]

(가) $f(0) = -3$
(나) 모든 양의 실수 x에 대하여 $6x-6 \le f(x) \le 2x^3-2$이다.

① 36　② 38　③ 40　④ 42　⑤ 44

08

2015학년도 수능(A형) 21번

다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(2)$의 최솟값은? [4점]

(가) $f(x)$의 최고차항의 계수는 1이다. (나) $f(0)=f'(0)$ (다) $x \geq -1$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq f'(x)$이다.

① 28 ② 33 ③ 38 ④ 43 ⑤ 48

09

2016학년도 9월 평가원(A형) 21번

실수 t에 대하여 직선 $x=t$가 두 함수

$$y=x^4-4x^3+10x-30,\ y=2x+2$$

의 그래프와 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 점 A와 점 B 사이의 거리를 $f(t)$라 하자.

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\times\lim_{h\to0-}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\le0$$

을 만족시키는 모든 실수 t의 값의 합은? [4점]

① -7　② -3　③ 1
④ 5　⑤ 9

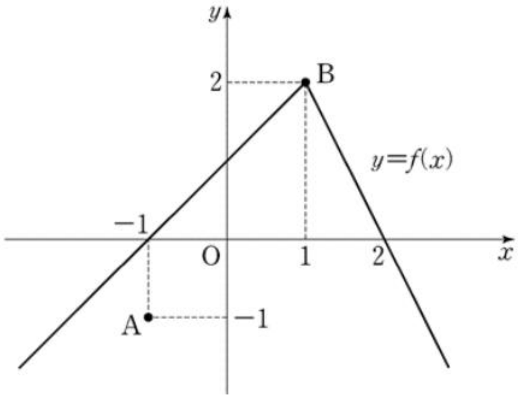
10

2017학년도 6월 평가원(나형) 29번

함수 $f(x)$는

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & (x < 1) \\ -2x+4 & (x \geq 1) \end{cases}$$

이고, 좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{A}(-1, -1)$, $\mathrm{B}(1, 2)$가 있다. 실수 x에 대하여 점 $(x, f(x))$에서 점 A까지의 거리의 제곱과 점 B까지의 거리의 제곱 중 크지 않은 값을 $g(x)$라 하자. 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 모든 a의 값의 합이 p일 때, $80p$의 값을 구하시오. [4점]



11

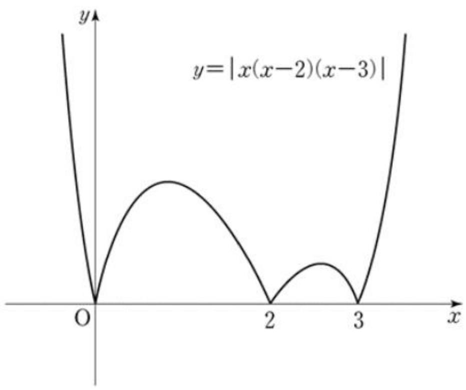
2017학년도 9월 평가원(나형) 21번

다음 조건을 만족시키며 최고차항의 계수가 음수인 모든 사차함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 최댓값은? [4점]

(가) 방정식 $f(x)=0$의 실근은 0, 2, 3뿐이다.
(나) 실수 x에 대하여 $f(x)$와 $\lvert x(x-2)(x-3)\rvert$ 중 크지 않은 값을 $g(x)$라 할 때, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

① $\dfrac{7}{6}$ ② $\dfrac{4}{3}$ ③ $\dfrac{3}{2}$

④ $\dfrac{5}{3}$ ⑤ $\dfrac{11}{6}$



12

2017학년도 수능(나형) 30번

실수 k에 대하여 함수 $f(x)=x^3-3x^2+6x+k$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 방정식 $4f'(x)+12x-18=(f'\circ g)(x)$가 닫힌 구간 $[0, 1]$에서 실근을 갖기 위한 k의 최솟값을 m, 최댓값을 M이라 할 때, m^2+M^2의 값을 구하시오. [4점]

13

2018학년도 6월 평가원(나형) 30번

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 2인 이차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(\alpha)=g(\alpha)$이고 $f'(\alpha)=g'(\alpha)=-16$인 실수 α가 존재한다. (나) $f'(\beta)=g'(\beta)=16$인 실수 β가 존재한다.

$g(\beta+1)-f(\beta+1)$의 값을 구하시오. [4점]

14

2018학년도 9월 평가원(나형) 30번

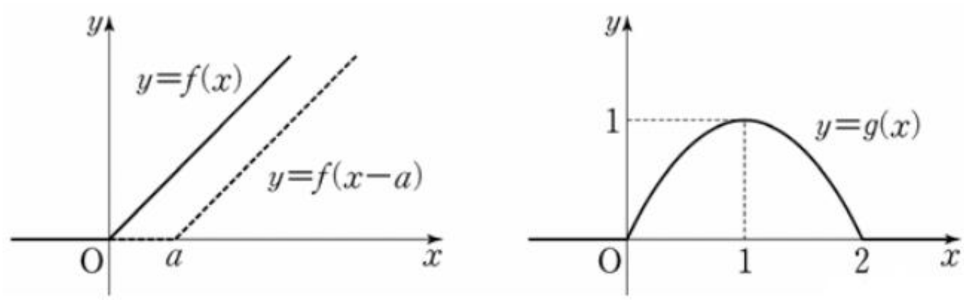
두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가

$$f(x)=\begin{cases}0 & (x\le 0)\\ x & (x>0)\end{cases},\quad g(x)=\begin{cases}x(2-x) & (|x-1|\le 1)\\ 0 & (|x-1|>1)\end{cases}$$

이다. 양의 실수 k, a, b $(a<b<2)$에 대하여, 함수 $h(x)$를

$$h(x)=k\{f(x)-f(x-a)-f(x-b)+f(x-2)\}$$

라 정의하자. 모든 실수 x에 대하여 $0\le h(x)\le g(x)$일 때, $\int_0^2\{g(x)-h(x)\}dx$의 값이 최소가 되게 하는 k, a, b에 대하여 $60(k+a+b)$의 값을 구하시오. [4점]



15

2019학년도 6월 평가원(나형) 21번

상수 a, b에 대하여 삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(-1)>-1$ (나) $f(1)-f(-1)>8$

[보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

[보기]

ㄱ. 방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㄴ. $-1<x<1$일 때, $f'(x)\geq 0$이다.
ㄷ. 방정식 $f(x)-f'(k)x=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 k의 개수는 4이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16

함수

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & (x<1) \\ cx^2+\dfrac{5}{2}x & (x\geq 1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이고 역함수를 갖는다. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 개수가 3이고, 그 교점의 x좌표가 각각 -1, 1, 2일 때, $2a+4b-10c$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 상수이다.) [4점]

17

2019학년도 6월 평가원(나형) 30번

사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 5 이하의 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} f(k) = f(n)f(n+1)$이다.
(나) $n=3,\ 4$일 때, 함수 $f(x)$에서 x의 값이 n에서 $n+2$까지 변할 때의 평균변화율은 <u>양수가 아니다.</u>

$128 \times f\left(\frac{5}{2}\right)$의 값을 구하시오. [4점]

18

사차함수 $f(x)=x^4+ax^2+b$에 대하여 $x \geq 0$에서 정의된 함수

$$g(x)=\int_{-x}^{2x}\{f(t)-|f(t)|\}dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0<x<1$에서 $g(x)=c_1$ (c_1은 상수)
(나) $1<x<5$에서 $g(x)$는 감소한다.
(다) $x>5$에서 $g(x)=c_2$ (c_2는 상수)

$f(\sqrt{2})$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① 40 ② 42 ③ 44
④ 46 ⑤ 48

19

2019학년도 9월 평가원(나형) 30번

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 방정식

$$(f \circ f)(x) = x$$

의 모든 실근이 0, 1, a, 2, b이다.

$$f'(1) < 0,\ f'(2) < 0,\ f'(0) - f'(1) = 6$$

일 때, $f(5)$의 값을 구하시오. (단, $1 < a < 2 < b$) [4점]

20

2019학년도 수능(나형) 21번

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)g(x)=x(x+3)$이다.
(나) $g(0)=1$

$f(1)$이 자연수일 때, $g(2)$의 최솟값은? [4점]

① $\frac{5}{13}$ ② $\frac{5}{14}$ ③ $\frac{1}{3}$

④ $\frac{5}{16}$ ⑤ $\frac{5}{17}$

21

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 -1인 이차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, 0)$에서의 접선과 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2, 0)$에서의 접선은 모두 x축이다.
(나) 점 $(2, 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 개수는 2이다.
(다) 방정식 $f(x)=g(x)$는 오직 하나의 실근을 가진다.

$x>0$인 모든 실수 x에 대하여

$$g(x) \le kx-2 \le f(x)$$

를 만족시키는 실수 k의 최댓값과 최솟값을 각각 α, β라 할 때, $\alpha-\beta=a+b\sqrt{2}$이다. a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.) [4점]

22

2020학년도 6월 평가원(나형) 30번

최고차항의 계수가 1이고 $f(2)=3$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{ax-9}{x-1} & (x<1) \\ f(x) & (x \geq 1) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 서로 다른 두 점에서만 만나도록 하는 모든 실수 t의 값의 집합은 $\{t \mid t=-1$ 또는 $t \geq 3\}$이다.

$(g \circ g)(-1)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [4점]

23

함수 $f(x)=x^3+x^2+ax+b$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x)+(x-1)f'(x)$$

라 하자. [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

[보기]

ㄱ. 함수 $h(x)$가 $h(x)=(x-1)f(x)$이면 $h'(x)=g(x)$이다.

ㄴ. 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극값 0을 가지면 $\int_0^1 g(x)dx=-1$이다.

ㄷ. $f(0)=0$이면 방정식 $g(x)=0$은 열린 구간 $(0,1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

24

2020학년도 9월 평가원(나형) 30번

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 네 개의 수 $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$가 이 순서대로 등차수열을 이루고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, f(-1))$에서의 접선과 점 $(2, f(2))$에서의 접선이 점 $(k, 0)$에서 만난다.
$f(2k)=20$일 때, $f(4k)$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [4점]

25

2022학년도 수능 예시문항(공통) 22번

함수

$$f(x) = x^3 - 3px^2 + q$$

가 다음 조건을 만족시키도록 하는 25 이하의 두 자연수 p, q의 모든 순서쌍 (p, q)의 개수를 구하시오. [4점]

(가) 함수 $|f(x)|$가 $x = a$에서 극대 또는 극소가 되도록 하는 모든 실수 a의 개수는 5이다.
(나) 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 함수 $|f(x)|$의 최댓값과 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 함수 $|f(x)|$의 최댓값은 같다.

26 2021학년도 6월 평가원(나형) 30번

이차함수 $f(x)$는 $x = -1$에서 극대이고, 삼차함수 $g(x)$는 이차항의 계수가 0이다. 함수

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & (x \leq 0) \\ g(x) & (x > 0) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시킬 때, $h'(-3) + h'(4)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 방정식 $h(x) = h(0)$의 모든 실근의 합은 1이다. (나) 닫힌구간 $[-2, 3]$에서 함수 $h(x)$의 최댓값과 최솟값의 차는 $3 + 4\sqrt{3}$이다.

27

2021학년도 9월 평가원(나형) 30번

삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=f(3)=0$ (나) 집합 $\{x \mid x \geq 1$이고 $f'(x)=0\}$의 원소의 개수는 1이다.

상수 a에 대하여 함수 $g(x)=|f(x)f(a-x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $\dfrac{g(4a)}{f(0)\times f(4a)}$의 값을 구하시오. [4점]

28

함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고, 함수 $g(x)$는 일차함수이다.
함수 $h(x)$를

$$h(x)=\begin{cases} |f(x)-g(x)| & (x<1) \\ f(x)+g(x) & (x\geq 1) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, $h(0)=0$, $h(2)=5$일 때, $h(4)$의 값을 구하시오. [4점]

29

2022학년도 6월 평가원(공통) 22번

삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
(나) 방정식 $f(x-f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

$f(1)=4$, $f'(1)=1$, $f'(0)>1$일 때, $f(0)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=f(x-3)\times\lim_{h\to0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
(나) 방정식 $g(x)=0$은 서로 다른 네 실근 α_1, α_2, α_3, α_4를 갖고
$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=7$이다.

31

2022학년도 수능(공통) 22번

최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 방정식 $f'(x)=0$이 닫힌구간 $[t, t+2]$에서 갖는 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{t \to a+} g(t) + \lim_{t \to a-} g(t) \le 2$이다.
>
> (나) $g(f(1)) = g(f(4)) = 2$, $g(f(0)) = 1$

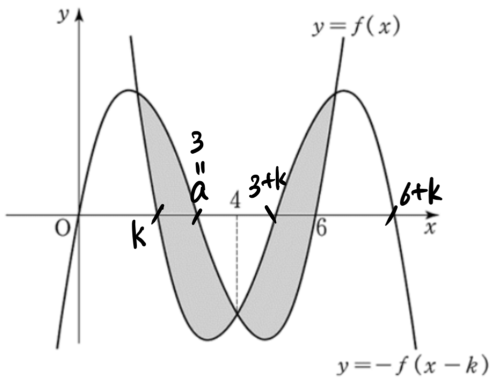
$f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

Ⅱ

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $y=f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)=f(6)=0$
(나) 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=-f(x-k)$의 그래프가 서로 다른 세 점 $(\alpha, f(\alpha))$, $(\beta, f(\beta))$, $(\gamma, f(\gamma))$ (단, $\alpha<\beta<\gamma$)에서 만나면 k의 값에 관계없이 $\int_{\alpha}^{\gamma}\{f(x)+f(x-k)\}dx=0$이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=-f(x-k)$의 그래프가 다음 그림과 같이 서로 다른 세 점에서 만나고 가운데 교점의 x좌표의 값이 4일 때, $\int_0^k f(x)dx$의 값을 구하시오. [4점] 16



$f(x)=x(x-6)(x-a)$ $(0<a<6)$

$k=0$ 이라 가정.

$\longrightarrow \alpha=0,\ \beta=a,\ \gamma=6$

$\longrightarrow \int_0^6 2f(x)dx=0$

$\longrightarrow \int_0^6 f(x)dx=0$

$\longrightarrow a=3$ 임을 알 수 있음. ($\because$ 삼차함수는 변곡점을 기준으로 대칭!)

$\therefore f(x)=x(x-3)(x-6)$

01

2006학년도 9월 평가원(가형) 20번

$f(4) = -f(4-k)$

$-8 = -(4-k)(1-k)(-2-k)$

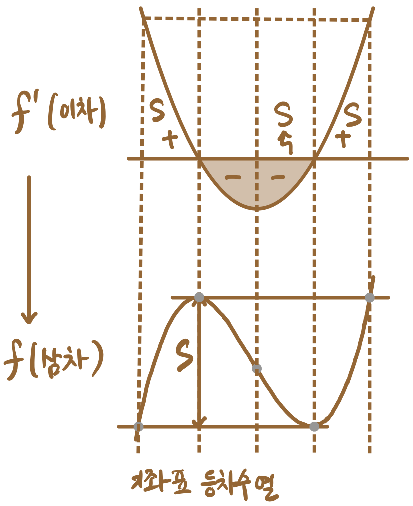
$\therefore k = 2 \quad (\because 0 \le k \le 3)$

$\therefore \int_0^2 f(x)\,dx = 16$

* 변곡점 (미적분 내용이지만, 미리 알면 많이 편리해짐!)

• 변곡점 : 함수의 볼록성과 오목성이 바뀌는 지점.

1) 변곡점에 대해 점대칭 : 삼차함수의 성질



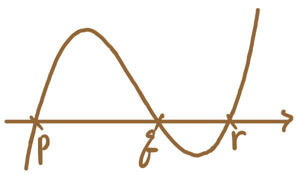
(m,n) 점대칭 : 변곡점

• $\dfrac{f(m-x)+f(m+x)}{2} = n$

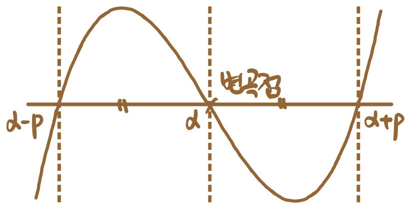
• $f'(m-x) = f'(m+x)$

2) 3×변곡점

$ax^3+bx^2+cx+d=0$



$\boxed{p+q+r=-\frac{b}{a}}$

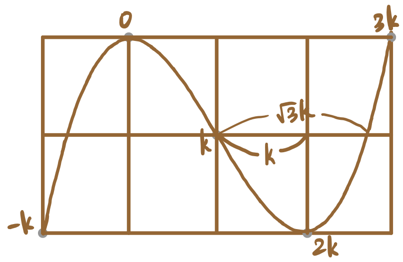


$f(x)=a(x-\alpha)(x-\alpha-p)(x-\alpha+p)$
$=ax^3+bx^2+cx+d$

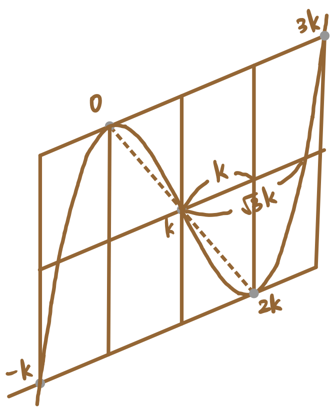
세 근의 합 $=-\frac{b}{a}=3\alpha$
$=3\times$(변곡점의 x좌표)

* 변곡점에 영향을 주는 것은 삼차항과 이차항 뿐임.

3) 비율관계



합동인 직사각형 8개



02

2010학년도 6월 평가원(가형) 24번

사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\dfrac{f'(5)}{f'(3)}$의 값을 구하시오. [4점] 12

> (가) 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극값을 갖는다.
> (나) 함수 $|f(x)-f(1)|$은 오직 $x=a\,(a>2)$에서만 미분가능하지 않다.

$f(x)$는 $x=2$에서 극값 가짐

$\longrightarrow$ $f(x)-f(1)$도 $x=2$에서 극값 가짐

$|f(x)-f(1)|$의 미·불점 의심점 : $f(x)-f(1)=0$: 바로 보이는 의심점 : $x=1$

⊕ 나) 조건

$x=a$ 외에는 미·가. $\longrightarrow$ $x=1$에선 미·가.

$\Rightarrow$

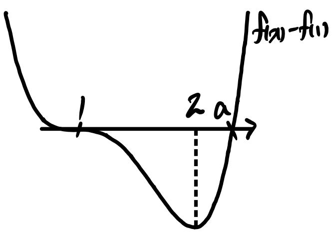
$x=a$도 미·불· 의심점 $\longrightarrow$ $f(a)=f(1)$

$\longrightarrow$ $f(x)-f(1)=(x-1)(x-a)g(x)$ ($g(x)$는 이차함수)

$\longrightarrow$ $f(x)-f(1)=(x-1)^2(x-a)h(x)$ ($h(a)\neq 0$, $h(x)$는 일차함수) (∵ 조건을 만족하려면 $(x-1)^2$을 인수로 가져야하고 $(x-a)^2$를 인수로 가지면 안된다.)

$\longrightarrow$ $h(b)=0$ 이라면 $(b\neq 1)$ $|f(x)-f(1)|$은 $x=b$에서도 미불.

$\therefore f(x)-f(1)=k(x-1)^3(x-a)$



$\longrightarrow$ $f'(x)=p(x-1)^2(x-2)$

$\therefore \dfrac{f'(5)}{f'(3)}=\dfrac{p\cdot 16\cdot 3}{p\cdot 4\cdot 1}=12$

03

2010학년도 9월 평가원(가형) 24번

다음 조건을 만족시키는 모든 사차함수 $y=f(x)$의 그래프가 항상 지나는 점들의 y좌표의 합을 구하시오. [4점] 13

(가) $f(x)$의 최고차항의 계수는 1이다.   (나) 곡선 $y=f(x)$가 점 $(2, f(2))$에서 직선 $y=2$에 접한다.   (다) $f'(0)=0$

$f(x)=(x-2)^2(x^2+ax+b)+2$

$f'(x)=2(x-2)(x^2+ax+b)+(x-2)^2(2x+a)$

$f'(0)=4a-4b=0$

$\therefore a=b$

$\therefore f(x)=(x-2)^2(x^2+ax+a)+2$

항상 지나야 하니 a로 정리.

$\longrightarrow f(x)=a(x+1)(x-2)^2+x^2(x-2)^2+2$

$\longrightarrow x=-1$ or $x=2$

$\therefore f(-1)=11,\ f(2)=2$

$\therefore 13$

04

2011학년도 수능(가형) 24번

최고차항의 계수가 1이고, $f(0)=3$, $f'(3)<0$인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 집합 S를

$$S=\{a\,|\ \text{함수 } |f(x)-t|\text{가 } x=a\text{에서 } \underline{\text{미분가능하지 않다.}}\}$$

라 하고, 집합 S의 원소의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=3$과 $t=19$에서만 불연속일 때, $f(-2)$의 값을 구하시오. [4점] 147

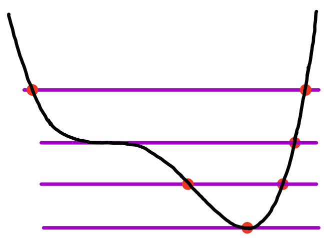
미·분· 의심점 : $|f(x)-t|=0$ 이 되는 지점

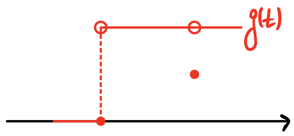
→ $f(a)-t=0$, $\{f(a)-t\}'\neq 0$

→ $y=f(x)$ 와 $y=t$ 로 해석, 만남 (접 X)

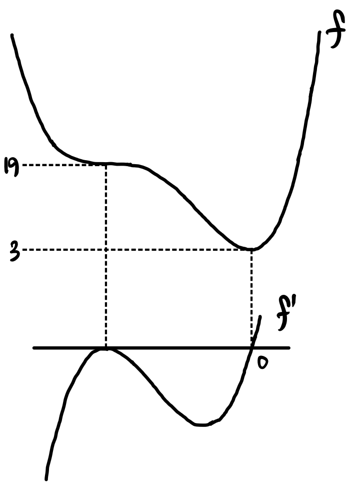
→ $y=g(x)$: $y=f(x)$와 $y=t$의 교점 (접점 X) 개수

i)





: 불연속점 2개

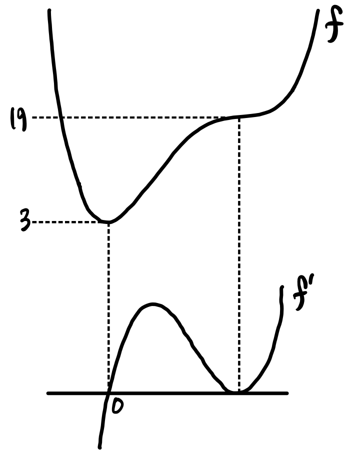


: $f'(3)>0$

04

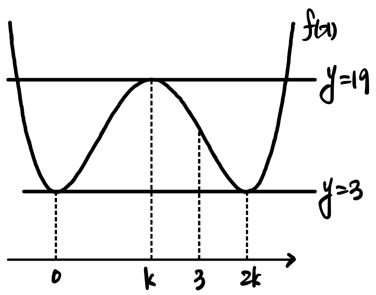
2011학년도 수능(가형) 24번

ii)



$: f'(3) \geq 0$

iii)



(2k=0 이 된다면 $f'(3)>0$ 이 됨.)

$f(x)-3=x^2(x-2k)^2$

$f(k)-3=k^4$

$16=k^4$

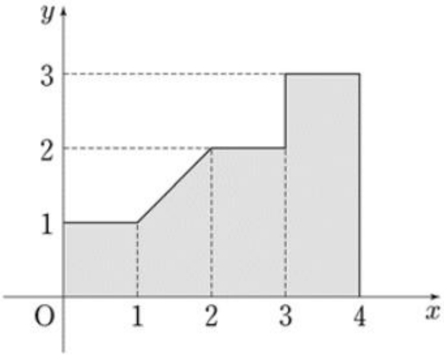
$\therefore k=2$

$\therefore f(-2)=4\cdot 36+3$

$=147$

05

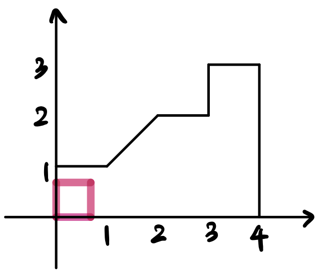
좌표평면 위에 그림과 같이 어두운 부분을 내부로 하는 도형이 있다. 이 도형과 네 점 $(0, 0)$, $(t, 0)$, (t, t), $(0, t)$를 꼭짓점으로 하는 정사각형이 겹치는 부분의 넓이를 $f(t)$라 하자.



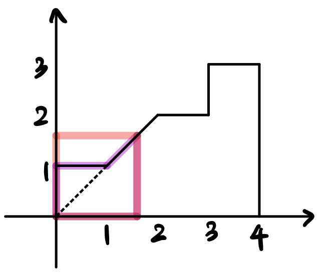
열린 구간 $(0, 4)$에서 함수 $f(t)$가 미분가능하지 <u>않은</u> 모든 t의 값의 합은? [4점]

① 2　　② 3　　③ 4
④ 5　　⑤ 6

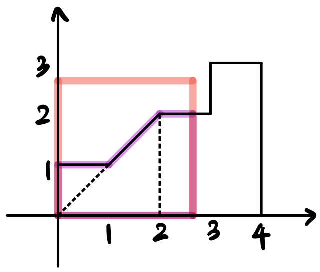
i) $t \le 1$: $f(t) = t^2$



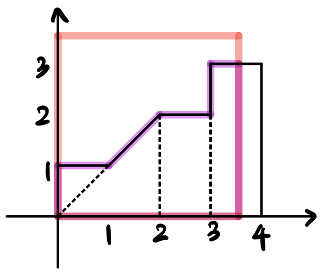
ii) $1 < t \le 2$: $f(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t^2$



iii) $2 < t \le 3$: $f(t) = 2t - \frac{3}{2}$



iv) $3 < t \le 4$: $f(t) = 3t - \frac{9}{2}$

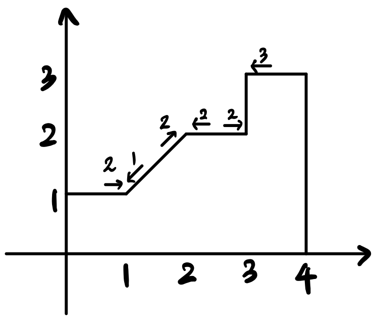


05

2014학년도 수능 예비시행(A형) 21번

$$\therefore f(t)=\begin{cases} t^2 & (0<t\le 1) \\ \frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2} & (1<t\le 2) \\ 2t-\frac{3}{2} & (2<t\le 3) \\ 3t-\frac{9}{2} & (3<t\le 4) \end{cases}$$

$$\therefore f'(t)=\begin{cases} 2t & (0<t\le 1) \\ t & (1<t\le 2) \\ 2 & (2<t\le 3) \\ 3 & (3<t\le 4) \end{cases}$$



$\therefore t=1, 3$ 에서 미·분

$\therefore 1+3=4$

06

2014학년도 9월 평가원(A형) 21번

사차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x)=(x+1)(x^2+ax+b)$$

이다. 함수 $y=f(x)$가 구간 $(-\infty, 0)$에서 감소하고 구간 $(2, \infty)$에서 증가하도록 하는 실수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 a^2+b^2의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M+m$의 값은? [4점]

① $\frac{21}{4}$　② $\frac{43}{8}$　③ $\frac{11}{2}$

④ $\frac{45}{8}$　⑤ $\frac{23}{4}$

sol1)

$(-\infty, 0)$ 에서 감소

$\longrightarrow f'(x) \le 0$

$\longrightarrow f'(x)$ 는 $(x+1)^2$을 인수로 가진다. $\because f(-1)=0$ $\longrightarrow$ 0 아래로 그래프를 꺾어줘야 함!

$\longrightarrow$ 그래야 극소가 되지 않고 계속 감소

$\longrightarrow (x-1)^2$

$g(x)=x^2+ax+b\big|_{x=-1}=1-a+b=0$　$\therefore b=a-1$

$f'(0)=b\le 0$　$\therefore a-1\le 0 \longrightarrow a\le 1$

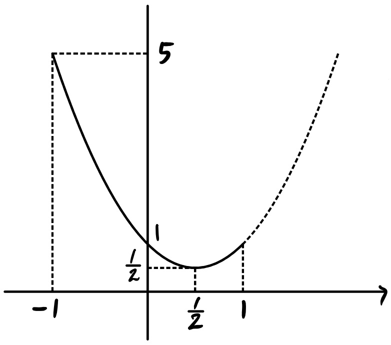
$f'(2)=3(4+2a+b)\ge 0$　$\therefore a\ge -1$

$\therefore -1\le a\le 1$

$\therefore a^2+b^2=a^2+(a-1)^2$
$=2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$

06

2014학년도 9월 평가원(A형) 21번



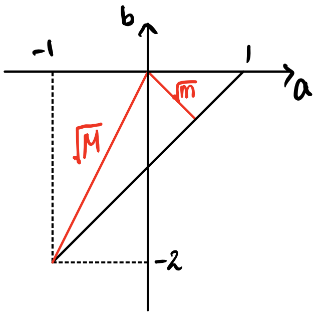
$\therefore M=5,\ m=\frac{1}{2}$

$\therefore M+m=\frac{11}{2}$

sol₂)

$b=a-1,\quad -1\le a\le 1$

$a^2+b^2=\left\{\sqrt{(a-0)^2+(b-0)^2}\right\}^2$: {점과 직선 사이 거리}^{2} !



$\therefore M=5,\ m=\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{11}{2}$

07

2015학년도 9월 평가원(A형) 21번

최고차항의 계수가 1인 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 값은? [4점]

(가) $f(0) = -3$
(나) 모든 양의 실수 x에 대하여 $6x-6 \le f(x) \le 2x^3-2$이다.

① 36 ② 38 ③ 40
④ 42 ⑤ 44

$g(x)=6x-6$, $h(x)=2x^3-2$ 라 하자.

$g(1)=h(1)=0$, $g'(1)=h'(1)=6$

$\longrightarrow f(1)=0$, $f'(1)=6$ ⋯⋯ ㉠

i) f가 일차함수

$f(x)=x-3 \longrightarrow$ ㉠ 조건 위배

ii) f가 이차함수

$f(x)=x^2+ax-3\Big|_{x=1} = 0 \quad \therefore a=2$

$f'(1) \neq 6$

iii) f가 삼차함수

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c\Big|_{x=1}=0 \quad \therefore a+b=2$

$f'(1)=6 \quad \therefore 2a+b=3$

$\therefore a=1,\ b=1$

$\therefore f(x)=x^3+x^2+x-3$

$\therefore f(3)=36$

iv) f의 최고차항이 사차 이상

$f(x)=x^n+ax^{n-1}+\cdots \quad (n\geq 4)$

$6x-6 \leq f(x) \leq 2x^3-2$

$6x-6 \leq x^n+ax^{n-1}+\cdots \leq 2x^3-2$

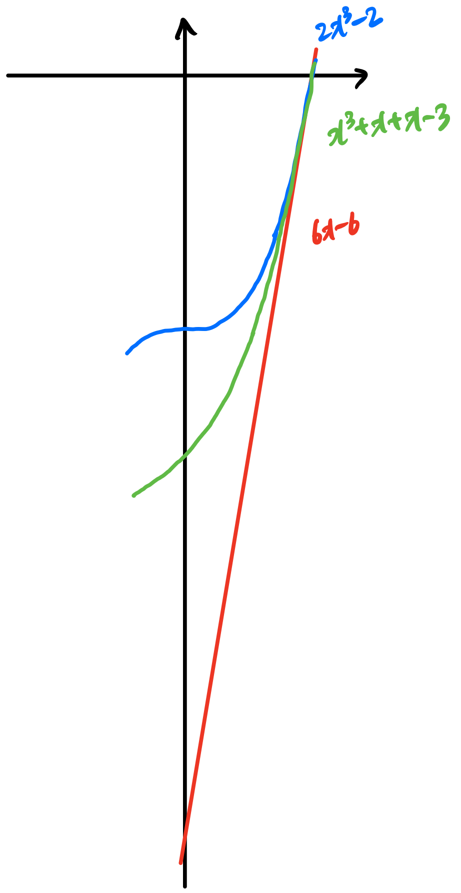
$\lim_{x\to\infty}\frac{6x-6}{x^3} \leq \lim_{x\to\infty}\frac{x^n+ax^{n-1}+\cdots}{x^3} \leq \lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-2}{x^3}$

$0 \leq$ 양의 무한대로 발산 ≤ 2

$\therefore$ 사차 이상부터는 성립 X

07

2015학년도 9월 평가원(A형) 21번



08

2015학년도 수능(A형) 21번

다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(2)$의 최솟값은? [4점]

> (가) $f(x)$의 최고차항의 계수는 1이다.
> (나) $f(0)=f'(0)$
> (다) $x \geq -1$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq f'(x)$이다.

① 28　　② 33　　③ 38
④ 43　　⑤ 48

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$\longrightarrow b = c$ ($\because$ 나 조건)

$f(x) - f'(x) \geq 0$ $(x \geq -1)$

$(x^3 + ax^2 + bx + b) - (3x^2 + 2ax + b) = x^3 + (b-3)x^2 + (c-2b)x = g(x) \geq 0$ $(x \geq -1)$

$g(x)$: $x=0$ 에서 극소 ($\because g(0)=0$)

$\longrightarrow g'(0) = b - 2a = 0$

$\longrightarrow b = 2a$

$g(-1) \geq 0$

$\longrightarrow a \geq 4$

$\therefore f(x) = x^3 + ax^2 + 2ax + 2a \Big|_{x=2} = 10a + 8 \geq 48$

09

2016학년도 9월 평가원(A형) 21번

실수 t에 대하여 직선 $x=t$가 두 함수

$$y=x^4-4x^3+10x-30,\ y=2x+2$$

의 그래프와 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 점 A와 점 B 사이의 거리를 $f(t)$라 하자.

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\times\lim_{h\to 0-}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\le 0$$

을 만족시키는 모든 실수 t의 값의 합은? [4점]

① -7　　② -3　　③ 1
④ 5　　⑤ 9

$$f(t)=\left|t^4-4t^3+10t-30-(2t+2)\right|$$

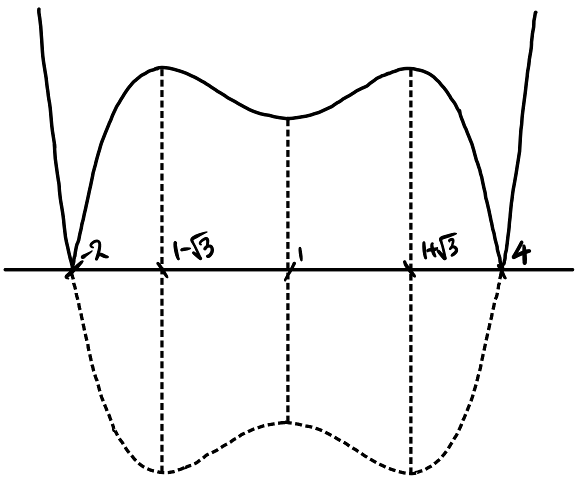
$$=\left|(t-4)(t+2)(t^2-2t+4)\right|$$

$$(x^4-4x^3+8x-32)'=4x^3-12x^2+8$$

$$=4(x-1)(x^2-2x-2)$$

$\longrightarrow$ $x=1$ 에서 극대, $x=1\pm\sqrt{3}$ 에서 극소

$\longrightarrow$ f: $x=1$ 에서 극소, $x=1\pm\sqrt{3}$ 에서 극대



09

2016학년도 9월 평가원(A형) 21번

$\lim_{h \to 0+} \frac{f(t+h)-f(t)}{h}$: $f(x)$의 $x=t$에서 우미계

$\lim_{h \to 0-} \frac{f(t+h)-f(t)}{h}$: $f(x)$의 $x=t$에서 좌미계

$\longrightarrow \lim_{h \to 0+} \frac{f(t+h)-f(t)}{h} \times \lim_{h \to 0-} \frac{f(t+h)-f(t)}{h}$: 우미계 × 좌미계 ≤ 0

① 우미계 또는 좌미계가 0

: $x=1$, $x=1\pm\sqrt{3}$

② 우미계 × 좌미계 < 0

: $x=4, -2$

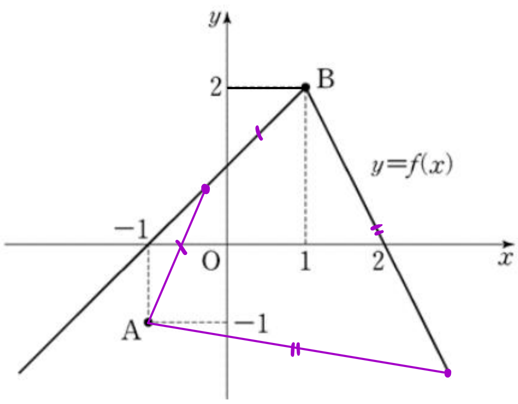
$\therefore t = 1+(1+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})+4+(-2)$
$= 5$

10

함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & (x<1) \\ -2x+4 & (x\geq 1) \end{cases}$$

이고, 좌표평면 위에 두 점 A$(-1,\,-1)$, B$(1,2)$가 있다. 실수 x에 대하여 점 $(x,f(x))$에서 점 A까지의 거리의 제곱과 점 B까지의 거리의 제곱 중 크지 않은 값을 $g(x)$라 하자. 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 모든 a의 값의 합이 p일 때, $80p$의 값을 구하시오. [4점] 186



두 거리가 같아질 때가 포인트

'크지 않은'의 정의로 해석

$$g(x)=\min\left\{(x+1)^2+\{f(x)+1\}^2,\ (x-1)^2+\{f(x)-2\}^2\right\}$$

: $f(x)$가 $x=1$을 기준으로 함수식 변화

: $g(x)$도 $x=1$을 기준으로 구간 분할

$$g(x)=\begin{cases} \min(2x^2+6x+5,\ 2x^2-4x+2) & (x<1) \\ \min(5x^2-18x+26,\ 5x^2-10x+5) & (x\geq 1) \end{cases}$$

10

i) $x=1$ 에서의 미·가성

$x \to 1-$: $2x^2+6x+5 > 2x^2-4x+2$: $g(x)=2x^2-4x+2$, $g'(x)=4x-4$

$x \to 1+$: $5x^2-18x+26 > 5x^2-10x+5$: $g(x)=5x^2-10x+5$, $g'(x)=10x-10$

$\longrightarrow$ $x=1$ 에서 미가

ii) $x<1$ 에서의 미·가성

$= |2x^2+6x+5-2x^2+4x+2|$ 의 미·가성

$= |10x+3|$

$\longrightarrow$ $x=-\frac{3}{10}$ 에서 미·불

iii) $x>1$ 에서의 미·가성

$= |5x^2-18x+26-5x^2+10x-5|$ 의 미·가성

$= |-8x+21|$

$\longrightarrow$ $x=\frac{21}{8}$ 에서 미·불

. $p=\frac{21}{8}-\frac{3}{10}=\frac{186}{80}$

$\therefore 80p=186$

11

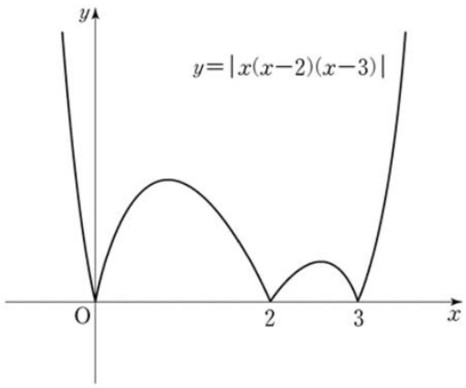
2017학년도 9월 평가원(나형) 21번

다음 조건을 만족시키며 최고차항의 계수가 음수인 모든 사차함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 최댓값은? [4점]

(가) 방정식 $f(x)=0$의 실근은 0, 2, 3뿐이다. (나) 실수 x에 대하여 $f(x)$와 $\lvert x(x-2)(x-3) \rvert$ 중 크지 않은 값을 $g(x)$라 할 때, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

① $\frac{7}{6}$　② $\frac{4}{3}$　③ $\frac{3}{2}$

④ $\frac{5}{3}$　⑤ $\frac{11}{6}$



sol.)

조건 (가)를 만족시키는 사차함수 f:

$f(x)=ax^2(x-2)(x-3)$ $(a<0)$

or $f(x)=ax(x-2)^2(x-3)$ $(a<0)$

or $f(x)=ax(x-2)(x-3)^2$ $(a<0)$

$h(x)=x(x-2)(x-3)$ 라 하자.

$h'(x)=(x-2)(x-3)+x(x-3)+x(x-2)$

$\therefore h'(0)=6,\ h'(2)=-2,\ h'(3)=3$

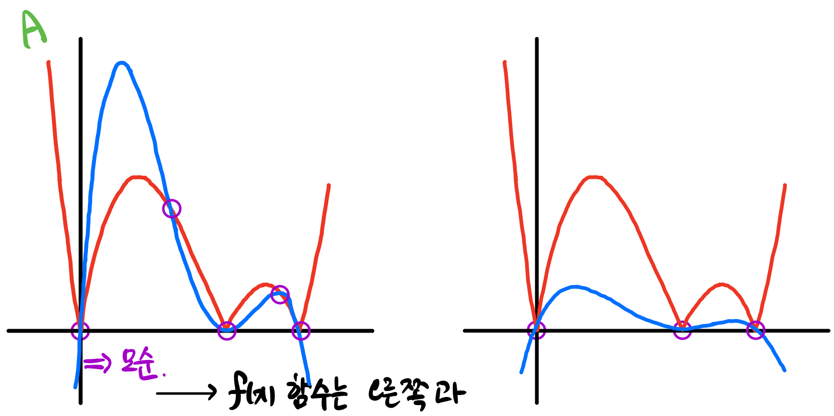
11

2017학년도 9월 평가원(나형) 21번

i) $f(x) = ax^2(x-2)(x-3)$ 라면

$f(1) = 2a < 0$

ii) $f(x) = ax(x-2)^2(x-3)$ 라면



⇒ 모순.

→ $f(x)$ 함수는 오른쪽과 같은 형태여야 함.

$$f'(x) = a(x-2)^2(x-3) + 2ax(x-2)(x-3) + ax(x-2)^2$$

$|h'(0)| \geq f'(0)$, $|h'(3)| \geq f'(3)$ 이 동시 성립해야함.

↳ a의 값에 관계 없이 $x=2$ 에서는 $g(x) = f(x)$ → $x=2$ 에서 미·가·

$0 < -12a \leq 6$, $-3 \leq 3a < 0$

↳ $a \geq -\frac{1}{2}$

$f(1) = -2a$ → $0 < f(1) \leq 1$

iii) $f(x) = ax(x-2)(x-3)^2$

A 참고.

$$f'(x) = a(x-2)(x-3)^2 + ax(x-3)^2 + 2ax(x-2)(x-3)$$

$|h'(0)| \geq f'(0)$, $|h'(2)| \geq f'(2)$ 이 동시 성립해야함.

↳ a의 값에 관계 없이 $x=3$ 에서는 $g(x) = f(x)$ → $x=3$ 에서 미·가·

11

$0 < -18a < 6$, $-2 \le 2a < 0$
$\hookrightarrow -\frac{1}{3} \le a < 0$

$f(1) = 4c \longrightarrow 0 < f(1) \le \frac{4}{3}$

$\therefore f(1)$의 최댓값 $= \frac{4}{3}$

sol2)

⋮

$f(x)$는 $h(x)$를 인수로 가짐.

$f(x) = |h(x)| \rightarrow$ 미·불· 의심점

$f(x) - |h(x)| = 0$

$a(x-b)\cdot h(x) = 0$ $\because f - |h|$는 $h(x)$의 근을 인수로 가짐
but, 사차함수
$\longrightarrow h$를 인수로 묶은 후 나머지 식 $(a(x-b))$

$\longrightarrow b$는 $0, 2, 3$ 중 하나여야 함.

$\longrightarrow$ $g(x) = \begin{cases} f(x) & (x \le 0,\ x \ge 3) \\ |h(x)| & (0 < x < 3) \end{cases}$

or $g(x) = \begin{cases} f(x) & (x \le 2,\ x \ge 3) \\ -h(x) & (2 < x < 3) \end{cases}$

or $g(x) = \begin{cases} f(x) & (x \le 0,\ x \ge 0) \\ h(x) & (0 < x < 2) \end{cases}$

or $g(x) = f(x)$

i) $g(x) = \begin{cases} f(x) & (x \le 0,\ x \ge 3) \\ |h(x)| & (0 < x < 3) \end{cases}$

$|h(x)|$ 가 $x=2$ 에서 미·불· : 모순

11

2017학년도 9월 평가원(나형) 21번

ii) $g(x) = \begin{cases} f(x) & (x \le 2,\ x \ge 3) \\ -h(x) & (2 < x < 3) \end{cases}$

$y=f(x)$ 와 $y=-h(x)$ 는 $x=2$, $x=3$ 에서 접해야 함.

$f(x)+h(x) = ax(x-2)^2(x-3)^2$

$\longrightarrow$ 5차함수 : 모순

iii) $g(x) = \begin{cases} f(x) & (x \le 0,\ x \ge 2) \\ h(x) & (0 < x < 2) \end{cases}$

$y=f(x)$ 와 $y=-h(x)$ 는 $x=0$, $x=2$ 에서 접해야 함.

$f(x)+h(x) = ax^2(x-2)^2(x-3)$

$\longrightarrow$ 5차함수 : 모순

iv) $g(x) = f(x)$

I) $f(x) = ax(x-2)^2(x-3)$ $(a<0)$

$f(x) = a(x-2)h(x)$

A) $0<x<2$

$f(x) < |h(x)| \rightarrow f(x) < h(x)$ $(\because h(x)>0)$

$a(x-2) < 1$

B) $2<x<3$

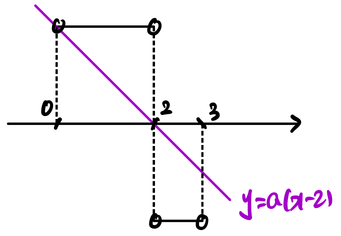
$f(x) < |h(x)| \rightarrow f(x) < -h(x)$ $(\because h(x)<0)$

$a(x-2) > -1$

11

2017학년도 9월 평가원(나형) 21번

$\longrightarrow -1 < a(x-2) < 1$



$\longrightarrow a \geq -\frac{1}{2}$

$\therefore f(1) = -2a$

$\therefore 0 < f(1) < 1$

II) $f(x) = ax(x-2)(x-3)^2 \quad (a<0)$

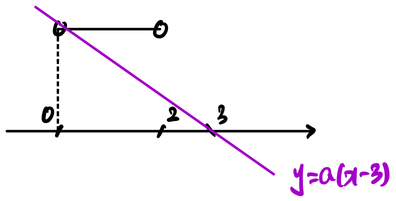
$f(x) = a(x-3)h(x)$

A) $0 < x < 2$

$f(x) < |h(x)| \rightarrow f(x) < h(x) \quad (\because h(x) > 0)$

$a(x-3) \leq 1$

$\longrightarrow a(x-3) < 1$



$\longrightarrow a \geq -\frac{1}{3}$

$\therefore f(1) = -4a$

$\therefore 0 < f(1) < \frac{4}{3}$

$\therefore Max(f(1)) = \frac{4}{3}$

12

2017학년도 수능(나형) 30번

실수 k에 대하여 함수 $f(x)=x^3-3x^2+6x+k$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 방정식 $4f'(x)+12x-18=(f'\circ g)(x)$가 닫힌 구간 $[0, 1]$에서 실근을 갖기 위한 k의 최솟값을 m, 최댓값을 M이라 할 때, m^2+M^2의 값을 구하시오. [4점] 65

$f'(x)=3x^2-6x+6$

$4(3x^2-6x+6)+12x-18=3\{g(x)\}^2-6g(x)+6$

$\{g(x)\}^2-2g(x)-2x(2x-2)=0$

$\{g(x)-2x\}\{g(x)+2x-2\}=0$

$\therefore g(x)=2x$ or $g(x)=-2x+2$

$\longrightarrow$ $g(x)$와 $y=2x$ 또는 $y=-2x+2$ 과 $0\le x\le 1$에서 만남.

$g^{-1}(x)=f(x)$

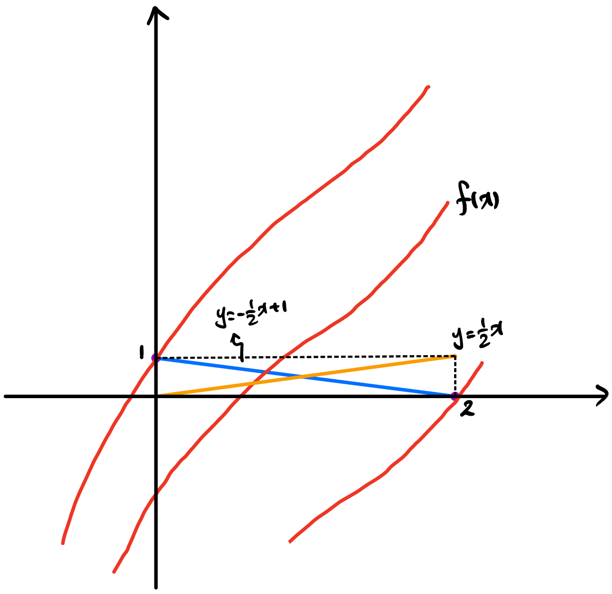
$y=2x \xrightarrow{-1} y=\frac{1}{2}$

$y=-2x+2 \xrightarrow{-1} y=-\frac{1}{2}x+1$

$\therefore$ $y=f(x)$가 $y=\frac{1}{2}$ 또는 $y=-\frac{1}{2}x+1$ 과 $0\le y\le 1$에서 만남.

12

2017학년도 수능(나형) 30번



: $f(x)$가 $(0,1)$ 지날 때 : 최대
$f(x)$가 $(2,0)$ 지날 때 : 최소

$f(0)=k=1=m$
$f(2)=k=-8=M$

$\therefore m+M^2=65$

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 2인 이차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(\alpha)=g(\alpha)$이고 $f'(\alpha)=g'(\alpha)=-16$인 실수 α가 존재한다.
(나) $f'(\beta)=g'(\beta)=16$인 실수 β가 존재한다.

$g(\beta+1)-f(\beta+1)$의 값을 구하시오. [4점] 243

sol.)

$h(x)=f(x)-g(x)$: 최고차항의 계수가 1인 삼차함수

가 $\longrightarrow f(\alpha)=g(\alpha) \longrightarrow h(\alpha)=0$
$\longrightarrow f'(\alpha)=g'(\alpha)=-16 \longrightarrow h'(\alpha)=0$

나 $\longrightarrow f'(\beta)=g'(\beta)=16 \longrightarrow h'(\beta)=0$

$\therefore h(x)=(x-\alpha)^2(x-k)$

$h'(x)=2(x-\alpha)(x-k)+(x-\alpha)^2=(x-\alpha)(3x-2k-\alpha)$
$h'(\beta)=(\beta-\alpha)(3\beta-2k-\alpha)=0$

$\therefore 2k=3\beta-\alpha \quad (\because \alpha\neq\beta)$

$\therefore h'(x)=(x-\alpha)^2\left(x-\frac{3\beta-\alpha}{2}\right)$

$g(x)=2x^2\sim$
$g'(x)=4x+a$

$g'(\alpha)=4\alpha+a=-16$
$g'(\beta)=4\beta+a=16$

$\therefore \beta-\alpha=8$

$$\therefore g(\beta+1)-f(\beta+1)=-h(\beta+1)$$

$$=-(\beta+1-\alpha)^2\left(\beta+1-\frac{3\beta-\alpha}{2}\right)$$

$$=-(\beta-\alpha+1)^2\left(-\frac{\beta-\alpha}{2}+1\right)$$

$$=-(8+1)^2(-4+1)$$
$$=-1\times 81\times(-3)$$
$$=243$$

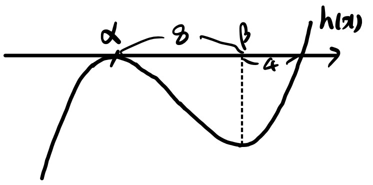
sol$_2$) 비율관계

$h(x)=f(x)-g(x)$

$h(\alpha)=h'(\alpha)=h'(\beta)=0$

$g'(\alpha)=4\alpha+a=-16$
$g'(\beta)=4\beta+a=16$

$\therefore \beta-\alpha=8$



($\because$ 비율관계)

$\therefore h(x)=(x-\alpha)^2(x-\alpha-12)$

13

2018학년도 6월 평가원(나형) 30번

$$\therefore g(\beta+1)-f(\beta+1) = -h(\beta+1)$$
$$= -(\beta-\alpha+1)^2(\beta-\alpha-11)$$
$$= -(8+1)^2(8-11)$$
$$= -81\times(-3)$$
$$= 243$$

sol3) f 와 g 따로

$$f(\alpha)=g(\alpha)=k$$

$$f(x+\alpha) = x^3+px^2-16x+k$$
$$g(x+\alpha) = 2x^2-16x+k$$

$$g'(x+\alpha) = 4x-16 \Big|_{x=\beta-\alpha} = 4\beta-4\alpha-16 = 16$$
$$\therefore \beta-\alpha = 8$$

$$f'(x+\alpha) = x^3+2px-16 \Big|_{x=\beta-\alpha} = (\beta-\alpha)^3+2p(\beta-\alpha)-16 = 16$$
$$2p = -20$$
$$\therefore p = -10$$

$$g(x+\alpha)-f(x+\alpha) = -x^3+12x^2 = -x^2(x-12)$$

$x=\beta-\alpha+1=9$ 대입

$$\therefore g(\beta+1)-f(\beta+1) = -81\times(-3) = 243$$

13

sol4) 이계도함수 (미적분)

$g''(x)=4$

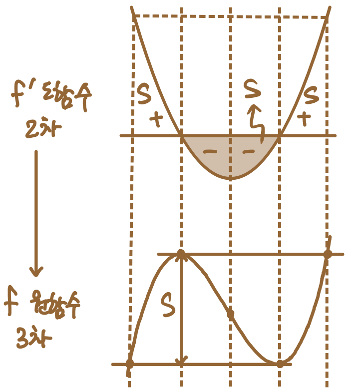
$g'(\beta)-g'(\alpha)=32$

$\int_{\alpha}^{\beta} g''(x)\,dx = 4(\beta-\alpha)=32$

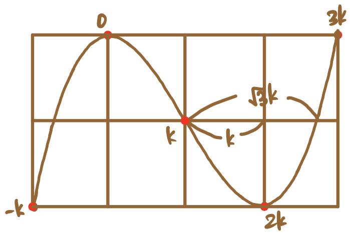
$\therefore \beta-\alpha=8$

⋮

* 참고 : 삼차함수 비율관계



x좌표 등차



합동인 직사각형 8개

13

2018학년도 6월 평가원(나형) 30번

＊이계도함수의 해석

이계도함수 : 함수 $f(x)$를 두 번 미분한 것

함수 $f(x)$가 정의역에서 :

- 도함수 $f'(x)$를 가진다 : $f(x)$ 미가, 연속

- 이계도함수 $f''(x)$를 가진다 : $f(x)$ 미가, 연속
  $f'(x)$ 미가, 연속

14
2018학년도 9월 평가원(나형) 30번

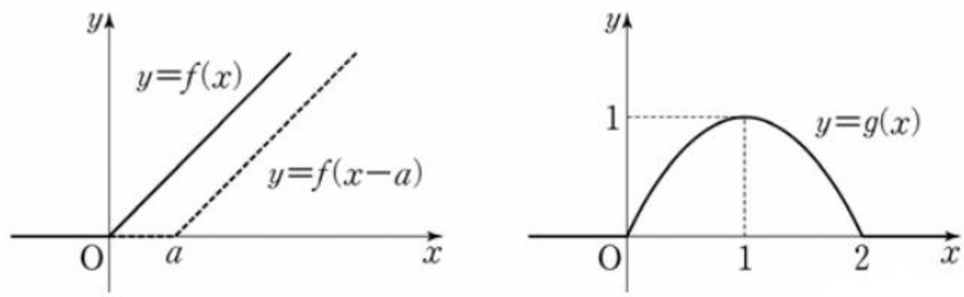
두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가

$$f(x)=\begin{cases}0 & (x\le 0)\\ x & (x>0)\end{cases},\quad g(x)=\begin{cases}x(2-x) & (|x-1|\le 1)\\ 0 & (|x-1|>1)\end{cases}$$

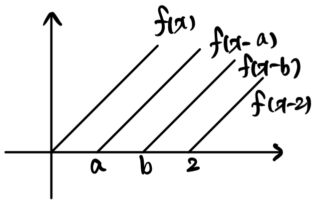
이다. 양의 실수 k, a, b $(a<b<2)$에 대하여, 함수 $h(x)$를

$$h(x)=k\{f(x)-f(x-a)-f(x-b)+f(x-2)\}$$

라 정의하자. 모든 실수 x에 대하여 $0\le h(x)\le g(x)$일 때,
$\int_0^2\{g(x)-h(x)\}dx$의 값이 최소가 되게 하는 k, a, b에 대하여
$60(k+a+b)$의 값을 구하시오. [4점]200



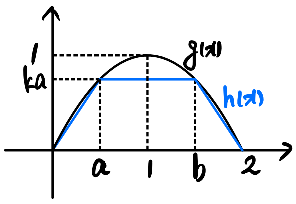
sol.)



$x<0$: $h(x)=0$
$0\le x<a$: $h(x)=kx$
$a\le x<b$: $h(x)=ak$
$b\le x<2$: $h(x)=k(-x+a+b)$
$x\ge 2$: $h(x)=0$ $(\because 0\le h(x)\le g(x))$

$\int_0^2\{g(x)-h(x)\}dx$ 가 최소려면 : $\int_0^2 h(x)dx$ 가 최대

2018학년도 9월 평가원(나형) 30번



$2-a=b$

$g(a)=ka \longrightarrow ka=(2-a)a$

$\therefore k=2-a$

$$\int_0^2 h(x)dx=\frac{1}{2}\{(b-a)+2\}\times ka$$

$$=a(a-2)^2=l(a)$$

$$l'(a)=(a-2)^2+2a(a-2)$$

$$=(a-2)(3a-2)=0$$

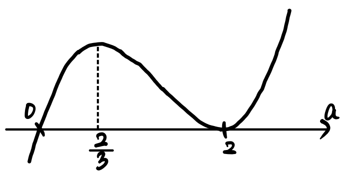
$\therefore a=\frac{2}{3}$ 에서 극대

$\therefore a=\frac{2}{3},\ b=\frac{4}{3},\ k=\frac{4}{3}$

$\therefore 60(k+a+b)=200$

Sol2) 비율관계

⋮



$\therefore a=\frac{2}{3},\ b=\frac{4}{3},\ k=\frac{4}{3}$

$\therefore 60(k+a+b)=200$

15

상수 a, b에 대하여 삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(-1)>-1$
(나) $f(1)-f(-1)>8$

[보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

[보기]

ㄱ. 방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㄴ. $-1<x<1$일 때, $f'(x)\geq 0$이다.
ㄷ. 방정식 $f(x)-f'(k)x=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 k의 개수는 4이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

sol.)

$f(-1)=-1+a-b>-1 \longrightarrow a>b$
$f(1)=1+a+b$

$f(1)-f(-1)=2+2b>8 \longrightarrow b>3$

$\therefore a>b>3$

ㄱ.
$f'(x)=3x^2+2ax+b$
$\frac{D}{4}=a^2-3b>0$
$a^2>3b$ 참

~~ㄴ.~~

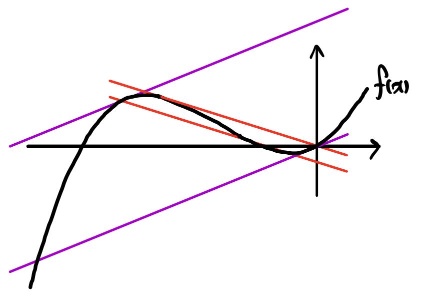
$3-a<0,\ b-a<0$

$f'(-1)=3-2a+b=(3-a)+(b-a)<0$
$f'(1)=3+2a+b>0$

$\longrightarrow f'(x)$는 $-1<x<1$ 에서 실근을 갖는다.
$\longrightarrow$ 거짓

ㄷ.

$f(x)=f'(k)x$
$y=f(x)$와 $y=f'(k)x$ 의 교점이 2개



: 4개 $\longrightarrow$ 참

sol2) ㄷ $\longrightarrow$ 수식적 풀이

$f(x)-f'(k)x=(x^2+ax-3k^2-2ak)x=0$
: 0 이외의 중근, 또는 0중근과 다른 한 실근

i) $x^2+ax-3k^2-2ak$ 가 0이 아닌 중근
$-3k^2-2ak\neq0$
$-k(3k+2a)\neq0 \longrightarrow k\neq0,\ k\neq-\frac{2}{3}a$

$D=a^2+12k^2+8ak=0$
$(a+2k)(a+6k)=0$
$k=-\frac{a}{2}$ 또는 $k=-\frac{a}{6}$

15

2019학년도 6월 평가원(나형) 21번

ii) $x^2+ax-3k^2-2ak$ 가 0과 다른 한 실근

$k=0,\ k=-\frac{2}{3}a$

$D=a^2+12k^2+8ak>0$

$(a+2k)(a+6k)>0$

$k<-\frac{a}{2},\ k>-\frac{a}{6}$

$\therefore k=0,\ -\frac{2}{3}a$

$\therefore$ 4개 $\longrightarrow$ 참

16

2019학년도 6월 평가원(나형) 29번

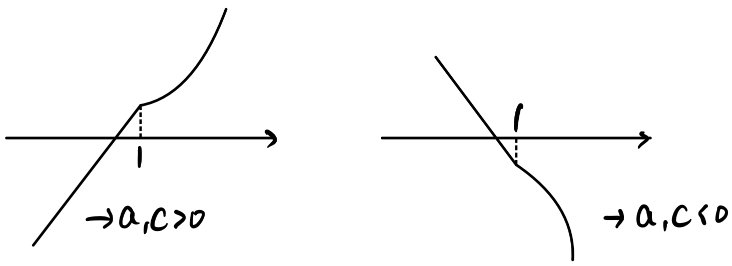
함수

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & (x<1) \\ cx^2+\dfrac{5}{2}x & (x\ge 1) \end{cases}$$

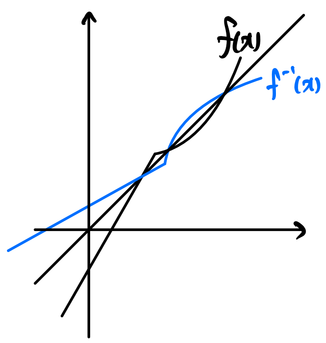
이 실수 전체의 집합에서 연속이고 역함수를 갖는다. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점의 개수가 3이고, 그 교점의 x좌표가 각각 -1, 1, 2일 때, $2a+4b-10c$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 상수이다.) [4점] 20

$a+b=c+\frac{5}{2}$

가능한 그래프



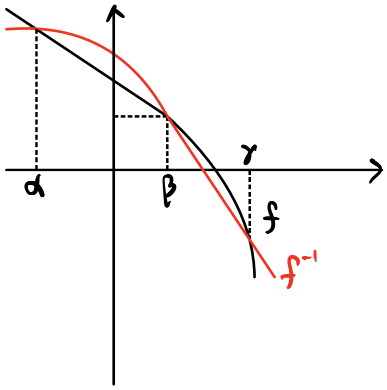
i) a, c >0



$f(1)=1 \longrightarrow c+\frac{5}{2}=1 \longrightarrow c=-\frac{3}{2}$

모순

ii) $a, c < 0$



$\alpha = -1,\ \beta = 1,\ \gamma = 2$

α와 γ는 $y=x$에 대하여 대칭

$\longrightarrow (-1, 2), (2, -1), (1, 1)$을 지남

$\therefore f(-1) = -a+b = 2$

$f(1) = c + \frac{5}{2} = 1 \longrightarrow c = -\frac{3}{2}$

$\therefore a = -\frac{1}{2},\ b = \frac{3}{2},\ c = -\frac{3}{2}\ \left(\because a+b = c+\frac{5}{2}\right)$

$\therefore 2a + 4b - 10c = 20$

17

2019학년도 6월 평가원(나형) 30번

사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 5 이하의 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} f(k) = f(n)f(n+1)$이다.
>
> (나) $n=3$, 4일 때, 함수 $f(x)$에서 x의 값이 n에서 $n+2$까지 변할 때의 평균변화율은 양수가 아니다.

$128 \times f\left(\frac{5}{2}\right)$의 값을 구하시오. [4점] 65

$\sum_{k=1}^{n} f(k) = f(n)f(n+1) \longrightarrow S(n) = a_n a_{n+1}$

$n=1$: $S_1 = a_1 a_2$

$a_1 = a_1 a_2$

$a_1(a_2 - 1) = 0$

$a_1 = 0$ or $a_2 = 1$

$S_n - S_{n-1} = a_n$, $S_{n-1} = a_n a_{n-1}$ $(2 \le n \le 5)$

$S_n - S_{n-1} = a_n a_{n+1} - a_n a_{n-1}$

$= a_n(a_{n+1} - a_{n-1}) = a_n$

$a_n(a_{n+1} - a_{n-1} - 1) = 0$

$a_n = 0$ or $a_{n+1} = a_{n-1} + 1$

$\therefore a_1 = 0$ or $a_2 = 1$

$a_2 = 0$ or $a_3 = a_1 + 1$

$a_3 = 0$ or $a_4 = a_2 + 1$

$a_4 = 0$ or $a_5 = a_3 + 1$

$a_5 = 0$ or $a_6 = a_4 + 1$

$\frac{f(5) - f(3)}{5-3} \le 0$, $\frac{f(6) - f(4)}{6-4} \le 0$

$\therefore a_5 \le a_3$, $a_6 \le a_4$

$\therefore a_4 = 0$, $a_5 = 0$ $(\because a_5 = a_3 + 1,\ a_6 = a_4 + 1$ 모순$)$

i) $a_1=0,\ a_2=0$

$a_4=a_2+1$

$0\neq 0+1$

$\therefore a_3=0$

$\vdots$

$\therefore a_1=a_2=a_3=a_4=a_5=0$

$\longrightarrow f(x)$가 사차함수라는 것에 모순

ii) $a_1=0,\ a_3=a_1+1$

$a_3=1$

$a_4=a_2+1 \longrightarrow a_2=-1\ (\because a_4=0)$

$\therefore a_1=a_4=a_5=0,\ a_3=1,\ a_2=-1$

$\therefore f(x)=a(x-1)(x-4)(x-5)(x-b)$

$f(3)=a\cdot 2\cdot(-1)\cdot(-2)(3-b)$

$=12a-4ab=1$

$f(2)=a\cdot 1\cdot(-2)\cdot(-3)(2-b)$

$=12a-6ab=-1$

$\therefore a=\frac{5}{12},\ b=\frac{12}{5}$

$\therefore f(x)=\frac{5}{12}(x-1)(x-4)(x-5)\left(x-\frac{12}{5}\right)$

$f(6)=\frac{5}{12}\cdot 5\cdot 2\cdot 1\cdot\frac{18}{5}=15 \longrightarrow$ 모순 $(\because a_6\leq a_4+1)$

iii) $a_2=1,\ a_3=a_1+1$

$a_3=0,\ a_1=-1$

$a_4=a_5=0$

17

2019학년도 6월 평가원(나형) 30번

$\therefore f(x) = a(x-3)(x-4)(x-5)(x-b)$

$f(2) = a\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)(2-b)$

$= -12a + 6ab = 1$

$f(1) = a\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)(1-b)$

$= -24a + 24ab = -1$

$\therefore a = -\frac{5}{24},\ b = \frac{6}{5}$

$\therefore f(x) = -\frac{5}{24}(x-3)(x-4)(x-5)\left(x-\frac{6}{5}\right)$

$f(6) = -\frac{5}{24}\times3\times2\times1\times\frac{24}{5} = -6 \longrightarrow$ 성립

$\therefore f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{5}{24}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot\frac{13}{10}$

$= \frac{65}{128}$

$\therefore 128\times f\left(\frac{5}{2}\right) = 65$

18 2019학년도 9월 평가원(나형) 21번

사차함수 $f(x)=x^4+ax^2+b$에 대하여 $x \geq 0$에서 정의된 함수

$$g(x)=\int_{-x}^{2x}\{f(t)-|f(t)|\}dt$$

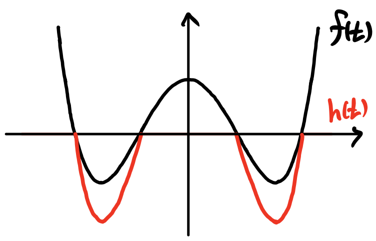
가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0<x<1$에서 $g(x)=c_1$ (c_1은 상수)
(나) $1<x<5$에서 $g(x)$는 감소한다.
(다) $x>5$에서 $g(x)=c_2$ (c_2는 상수)

$f(\sqrt{2})$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

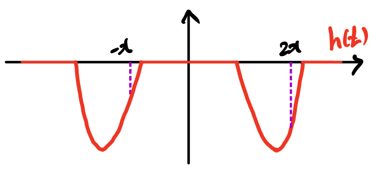
① 40 ② 42 ③ 44
④ 46 ⑤ 48

$$h(x)=f(x)-|f(x)|=\begin{cases}0 & (f(x)\geq 0)\\ 2f(x) & (f(x)<0)\end{cases}$$



: h(t) : y축 대칭, $h(t) \leq 0$

$$\int_{-x}^{2x} h(t)dt = S$$



18

가) $0<x<1$ 에서 $g(x)=$ 상수

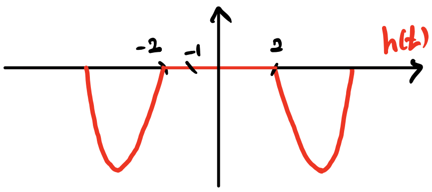
$\longrightarrow [-x, 2x]$ 가 다 상수함수여야 한다. $(h(t)=0)$

$\longrightarrow [-2, 2]$ 에서 $h(t)=0$ (∵ 대칭성)

나) $1<x<5$ 에서 $g(x)$ 감소

$\longrightarrow t>2$ 부터 $h(t)<0$

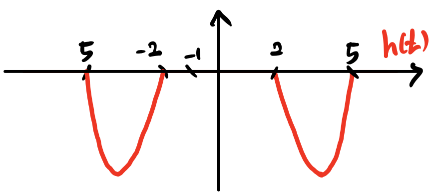
∴ 그래프



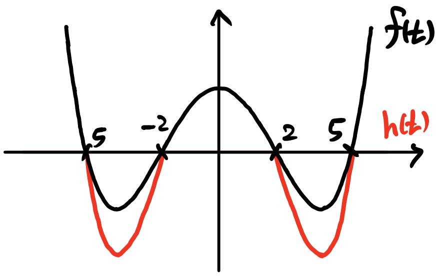
다) $x>5$ 에서 $g(x)=$ 상수

$\longrightarrow [5, \infty) \cup (-\infty, -5]$ 에서 상수

∴ 그래프



∴



∴ $f(x)=(x+2)(x-2)(x+5)(x-5)=(x^2-4)(x^2-25)$

∴ $f(\sqrt{2})=46$

19

2019학년도 9월 평가원(나형) 30번

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 방정식

$$(f \circ f)(x) = x$$

의 모든 실근이 0, 1, a, 2, b이다.

$$f'(1) < 0, \ f'(2) < 0, \ f'(0) - f'(1) = 6$$

일 때, $f(5)$의 값을 구하시오. (단, $1 < a < 2 < b$) [4점] 40

$x=\alpha$가 $f(f(x))=x$의 한 실근이고 $f(\alpha)=\beta$라 하자.

$f(f(\alpha))=\alpha \longrightarrow f(\beta)=\alpha$

$f(f(\beta))=f(\alpha)=\beta$

$\longrightarrow$ α, β 둘 다 $f(f(x))=x$의 실근이다.

i) $\alpha=\beta \longrightarrow y=f(x)$는 (α,α)를 지난다.

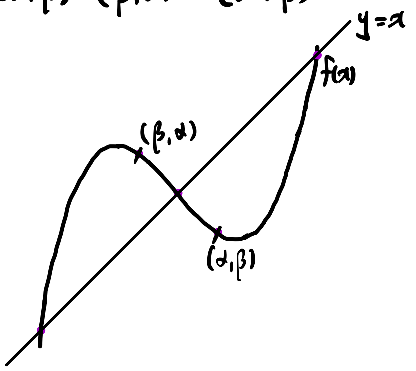
$y=f(x)$와 $y=x$는 점 (α,α)에서 만난다.

$\longrightarrow$ α는 $f(x)=x$의 실근

$f(x)=x$의 실근은 최대 세개

but, $f(f(x))=x$의 실근은 5개이므로 X

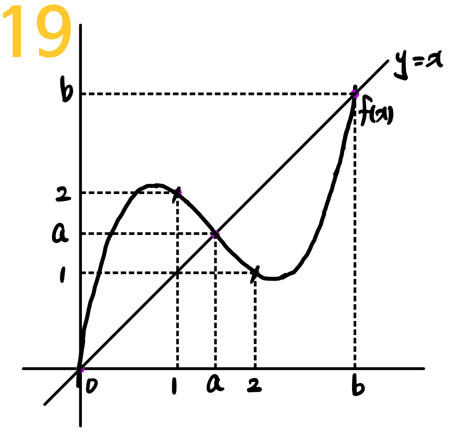
ii) (α,β) (β,α) $(\alpha \neq \beta)$



근 5개

19

2019학년도 9월 평가원(나형) 30번



$f(x)=px^3+qx^2+rx$, $f'(x)=3px^2+2qx+r$

$f(1)=p+q+r=2$

$f(2)=8p+4q+2r=1$

$f'(0)-f'(1)=-3p-2q=6$

$\therefore p=1,\ q=-\frac{9}{2},\ r=\frac{11}{2}$

$\therefore f(x)=x^3-\frac{9}{2}x^2+\frac{11}{2}x$

$\therefore f(5)=40$

20

2019학년도 수능(나형) 21번

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)g(x) = x(x+3)$이다.
> (나) $g(0) = 1$

$f(1)$이 자연수일 때, $g(2)$의 최솟값은? [4점]

① $\frac{5}{13}$ ② $\frac{5}{14}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{5}{16}$ ⑤ $\frac{5}{17}$

$f(0)g(0) = 0$

$\therefore f(0) = 0 \quad (\because g(0) = 1)$

$f(x) = x^3 + ax^2 + b$

$g(x) = \frac{x(x+3)}{f(x)} \quad (f(x) \neq 0)$

g는 연속 → $x=0$ 에서도 정의돼야 함.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x(x+3)}{f(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x(x+3)}{x^3 + ax^2 + bx}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x+3}{x^2 + ax + b}$$

$$= \frac{3}{b} = 1$$

$\therefore b = 3$

$\therefore g(x) = \frac{x+3}{x^2 + ax + 3} \quad (x^2 + ax + 3 \neq 0)$

→ $x^2 + ax + 3 = 0$ 이 되는 지점이 불연속 의심점

→ $x^2 + ax + 3 > 0$

20

2019학년도 수능(나형) 21번

$D = a^2 - 12 < 0$

$\therefore -2\sqrt{3} < a < 2\sqrt{3}$

$f(1) = 4 + a$: 자연수

$\therefore a = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$

$g(2) = \dfrac{5}{7+2a}$: 최소 $\longrightarrow$ a가 최대

$\therefore a \rightarrow 3$

$\therefore \min(g(2)) = \dfrac{5}{13}$

21

2019학년도 수능(나형) 30번

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 -1인 이차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,0)$에서의 접선과 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2,0)$에서의 접선은 모두 x축이다.
(나) 점 $(2,0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 개수는 2이다.
(다) 방정식 $f(x)=g(x)$는 오직 하나의 실근을 가진다.

$x>0$인 모든 실수 x에 대하여

$$g(x) \le kx-2 \le f(x)$$

를 만족시키는 실수 k의 최댓값과 최솟값을 각각 α, β라 할 때, $\alpha-\beta=a+b\sqrt{2}$이다. a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.) [4점] 5

sol.)

가) $\longrightarrow$ $f(x)=x^2(x-a)$

$g(x)=-(x-2)^2$

나) $\longrightarrow$ $y=f'(t)(x-t)+f(t)$

$0=f'(t)(2-t)+f(t)$

$=(3t^2-2at)(2-t)+t^2(t-a)$

$=t\{-2t^2+(a+6)t-4a\}=0$

$\longrightarrow$ 서로 다른 두 실근을 가져야 함.

$\longrightarrow$ 0 과 0이 아닌 중근 or 0 중근과 다른 실근

i) 0과 0이 아닌 중근

$D=(a+6)^2-32a=0$

$a=2$ or 18

I) $a=2 \longrightarrow f(x)=x^2(x-2)$

II) $a=18 \longrightarrow f(x)=x^2(x-18)$

21

2019학년도 수능(나형) 30번

ii) 0 중근과 다른 실근

$-4a=0 \longrightarrow a=0$

$-2t^2+6t=-2t(t-3)$

$a=0 \longrightarrow f(x)=x^3$

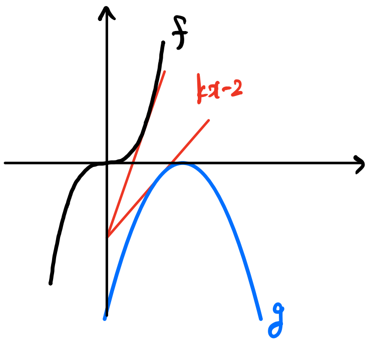
다)

$f(x)=x^2(x-a)$

$a \geq 2$ 면 $f(x)=g(x)$는 세 실근을 가지니 모순

$\therefore f(x)=x^3$

$-(x-2)^2 \leq kx-2 \leq x^3$



i) $y=kx-2$ 가 $y=f(x)$에 접할 때 (k 최대)

$y=f'(t)(x-t)+f(t)$

$=3t^2(x-t)+t^3$

$2=-3t^3+t^3$

$=-2t^3$

$t^3=-1 \longrightarrow t=1$

$\therefore \max(k)=3t^2$

$=3$

21

ii) $y=kx-2$ 가 $y=g(x)$ 에 접할 때 (k 최소)

$kx-2=-(x-2)^2$
$x^2+(k+4)x+2=0$
$D=(k+4)^2-8=0$
$\therefore k=4-2\sqrt{2}$ $(\because 4+2\sqrt{2}>3)$

$\therefore \alpha=3,\ \beta=4-2\sqrt{2}$

$\alpha-\beta=-1+2\sqrt{2}$
$\therefore a=-1,\ b=2$
$\therefore a^2+b^2=5$

sol2)
$g(x)=-(x-2)^2$
$f(x)=x^2(x-a)$

다) $\longrightarrow$ $a\geq 2$ 라면 서로 다른 세 실근
$0<a<2$ 라면 점 $(2,0)$ 에서 그은 접선의 개수 : 3개
$a<0$ 라면 점 $(2,0)$ 에서 그은 접선의 개수 : 3개
$\therefore a=0$
$\therefore f(x)=x^3$

⋮

21

✱참고 : 변곡점 (미적분)

- 변곡점의 판정

① $f(x)$ (직선 X, 곡선)

$P(a, f(a))$ 점대칭 $\longrightarrow$ f는 $x=p$ 변곡점

② f 미·가· (직선 X, 곡선)

f'으로 판정 1st. f'극점 $\longrightarrow$ f 변곡점

2nd. 미가 f는 절대로 극점이면서 변곡점일 수 X

$f'(a)=0 \longrightarrow x=a$ 극점 $\longrightarrow$ 변곡점 X

$f'(a)=0 \longrightarrow x=a$ 극점 X $\longrightarrow$ 변곡점

$f'(a)\neq 0$: 이계도함수로 판별

곱: $(x-a)^{짝수}\cdot f(x)$ $(f(a)\neq 0)$: $(a,0)$ 극점

$(x-a)^{홀수}\cdot f(x)$ $(f(a)\neq 0)$: $(a,0)$ 변곡점

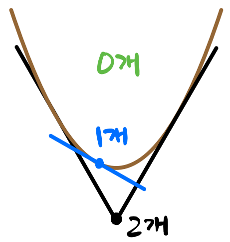
홀수 ≥ 3

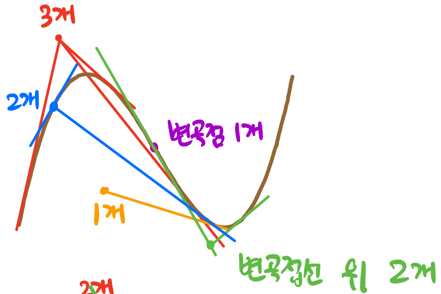
21

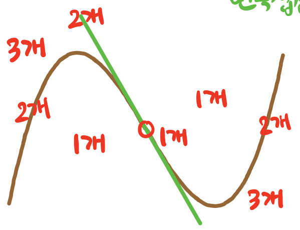
2019학년도 수능(나형) 30번

*참고 : 접선 수 변화 경계

- 곡선 그 자체
- 변곡점, 변곡접선
- 점근선







22 2020학년도 6월 평가원(나형) 30번

최고차항의 계수가 1이고 $f(2)=3$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

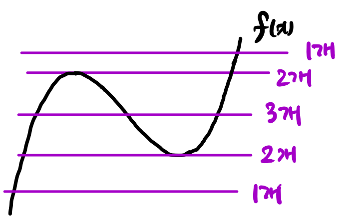
$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{ax-9}{x-1} & (x<1)\\ f(x) & (x\geq 1)\end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

> 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 서로 다른 두 점에서만 만나도록 하는 모든 실수 t의 값의 집합은 $\{t\,|\,t=-1$ 또는 $t\geq 3\}$이다.

$(g\circ g)(-1)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [4점] 19

$y=\dfrac{ax-9}{x-1}$; 점근선 ; $x=1$
$y=a$



→ $t\geq 3$ 에서 $y=f(x)$와 $y=t$가 만나는 점이 1개이면
$y=\dfrac{ax-9}{x-1}$와 $y=t$와 만나야 함.

$t\geq 3$에서 $y=f(x)$와 $y=t$가 만나는 점이 2개이면
$y=\dfrac{ax-9}{x-1}$와 $y=t$가 만나면 안됨.

$t\geq 3$에서 $y=f(x)$와 $y=t$가 만나는 점이 3개이면 안됨.

→ $y=\dfrac{ax-9}{x-1}$의 점근선은 $y=3$이 돼야 함.

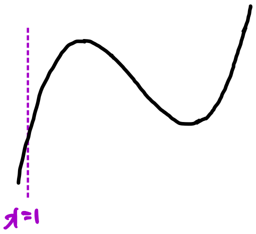
→ $a=3$, $y=f(x)$의 극댓값은 3

→ $t=-1$일 때 → $y=\dfrac{ax-9}{x-1}$와는 만날 수 없음 ($\because a=3$)

22

2020학년도 6월 평가원(나형) 30번

$\therefore y=f(x)$의 극솟값은 $-1 \longrightarrow f(1)\le 1$



$f(2)=3 \longrightarrow$ 극대 지점이 $(2,3)$ 또는 $(2,3)$ 지점이 있음.

ⅰ) 극대 지점이 $(2,3)$

$$f(x)=(x-2)^2(x-a)+3 \quad (a>2)$$

$$f'(x)=2(x-2)(x-a)+(x-2)^2$$

$$=(x-2)(3x-2a-2)$$

$\therefore x=\dfrac{2a+2}{3}$ 에서 극솟값 -1

$$f\left(\frac{2a+2}{3}\right)=\left(\frac{2a+2}{3}-2\right)^2\left(\frac{2a+2}{3}-a\right)+3$$

$$=-\frac{4}{27}(a-2)^3+3=-1$$

$\therefore a=5$

$$\therefore g(x)=\begin{cases}\dfrac{3x-9}{x-1} & (x<1)\\ (x-2)^2(x-5)+3 & (x\ge 1)\end{cases}$$

ii) 극대가 아닌 지점이 (2,3)

$$f(x)=(x-2)(x-a)^2+3$$
$$f'(x)=(x-a)^2+2(x-2)(x-a)$$
$$=(x-a)(3x-a-4)$$

$$\longrightarrow a<\frac{a+4}{3} \quad (\because 1\le a<2)$$

$$\longrightarrow f\left(\frac{a+4}{3}\right)=-1$$

$$f\left(\frac{a+4}{3}\right)=\left(\frac{a+4}{3}-2\right)\left(\frac{a+4}{3}-a\right)^2+3$$

$$=4\times\left(\frac{a-2}{3}\right)^3+3=-1$$
$$\longrightarrow a=-1 \longrightarrow \text{모순}$$

$$\therefore g(x)=\begin{cases}\dfrac{3x-9}{x-1} & (x<1)\\ (x-2)^2(x-5)+3 & (x\ge1)\end{cases}$$

$$\therefore (g\circ g)(-1)=g(6)=19$$

23 2020학년도 9월 평가원(나형) 21번

함수 $f(x)=x^3+x^2+ax+b$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x)+(x-1)f'(x)$$

라 하자. [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

[보기]

ㄱ. 함수 $h(x)$가 $h(x)=(x-1)f(x)$이면 $h'(x)=g(x)$이다.

ㄴ. 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극값 0을 가지면 $\int_0^1 g(x)dx=-1$ 이다.

ㄷ. $f(0)=0$이면 방정식 $g(x)=0$은 열린 구간 $(0, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Sol1)

ㄱ. $h(x)=(x-1)f(x)$

$h'(x)=f(x)+(x-1)f'(x)$

$=g(x)$

ㄴ. $f(-1)=f'(-1)=0$

$f(-1)=-a+b=0$

$f'(-1)=1+a=0$

$\therefore a=b=-1$

$\therefore f(x)=x^3+x^2-x-1$

$g(x)=(x^3+x^2-x-1)+(x-1)(3x^2+2x-1)$

$=4x^4-4x$

$\int_0^1 g(x)dx = x^5-2x^2 \Big|_0^1 = -1$

ㄷ. $\int g(x)\,dx = (x-1)f(x) + C = G(x)$

$G(0) = G(1) = C$

∴ 롤의 정리에 의하여 구간 $(0, 1)$에 적어도 하나의 실근 가짐.

Sol2) ㄱ을 이용하기

ㄴ.

$f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$

$h'(x) = g(x)$ (∵ ㄱ) 참고)

$\therefore \int_0^1 g(x)\,dx = h(1) - h(0)$

$h(1) = 0,\ h(0) = -f(0) = 1$

$\therefore \int_0^1 g(x)\,dx = 0 - 1 = -1$

ㄷ.

$h'(x) = g(x) \longrightarrow h(x)$: 미·가.

$f(0) = 0 \longrightarrow h(0) = 0$

$h(1) = 0$

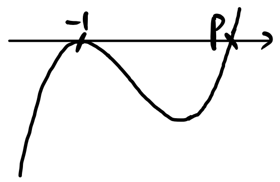
$\longrightarrow$ 롤의 정리에 의하여 $g(x)$는 $(0, 1)$에서 실근을 가짐. (∵ $h'(x) = g(x)$)

Sol3) ㄴ) 다르게 풀기

ㄴ.

$f(-1)=f'(-1)=0$

$\longrightarrow f(x)=(x+1)^2(x-p)$



근과 계수 관계 : $\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$

$-1-1+p=-1$

$\therefore p=1$

$\therefore f(x)=(x+1)^2(x-1)$

⋮

＊참고 : 롤의 정리

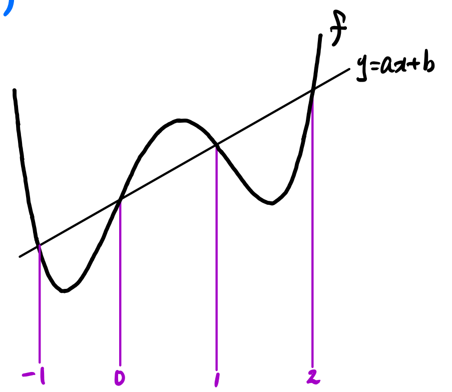
함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고
열린구간 (a,b)에서 미분가능할 때

$f(a)=f(b)$ 이면
$f'(c)=0$ 인 c가 적어도 (a,b)에 존재한다.

24

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 네 개의 수 $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$가 이 순서대로 등차수열을 이루고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, f(-1))$에서의 접선과 점 $(2, f(2))$에서의 접선이 점 $(k, 0)$에서 만난다.
$f(2k)=20$일 때, $f(4k)$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [4점] 42

sol.)



$f(x)-(ax+b)=(x+1)x(x-1)(x-2)$
$f(x)=x^4-2x^3-x^2+(a+2)x+b$
$f'(x)=4x^3-6x^2-2x+(a+2)$

$f(-1)=-a+b$, $f(2)=2a+b$
$f'(-1)=a-6$, $f'(2)=a+6$

$x=-1$ 에서 접·방 : $y=(a-6)(x+1)-a+b$
$x=2$ 에서 접·방 : $y=(a+6)(x-2)+2a+b$

$0=(a-6)(k+1)-a+b \longrightarrow k=\dfrac{6-b}{a-6}$
$0=(a+6)(k-2)+2a+b \longrightarrow k=\dfrac{12-b}{a+6}$

$\therefore \dfrac{6-b}{a-6}=\dfrac{12-b}{a+6} \longrightarrow a+2b=18$
$\longrightarrow a=18-2b$

$k=\dfrac{6-b}{a-6}=\dfrac{6-b}{12-2b}=\dfrac{1}{2}$

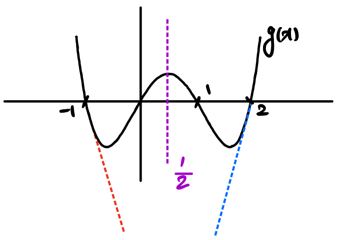
$f(2k)=f(1)=a+b=20$
$\therefore a=22,\ b=-2$
$\therefore f(x)=x^4-2x^3-x^2+24x-2$

$\therefore f(4k)=f(2)=42$

Sol$_2$)

$g(x) = f(x) - (ax+b)$

$= (x+1)x(x-1)(x-2)$

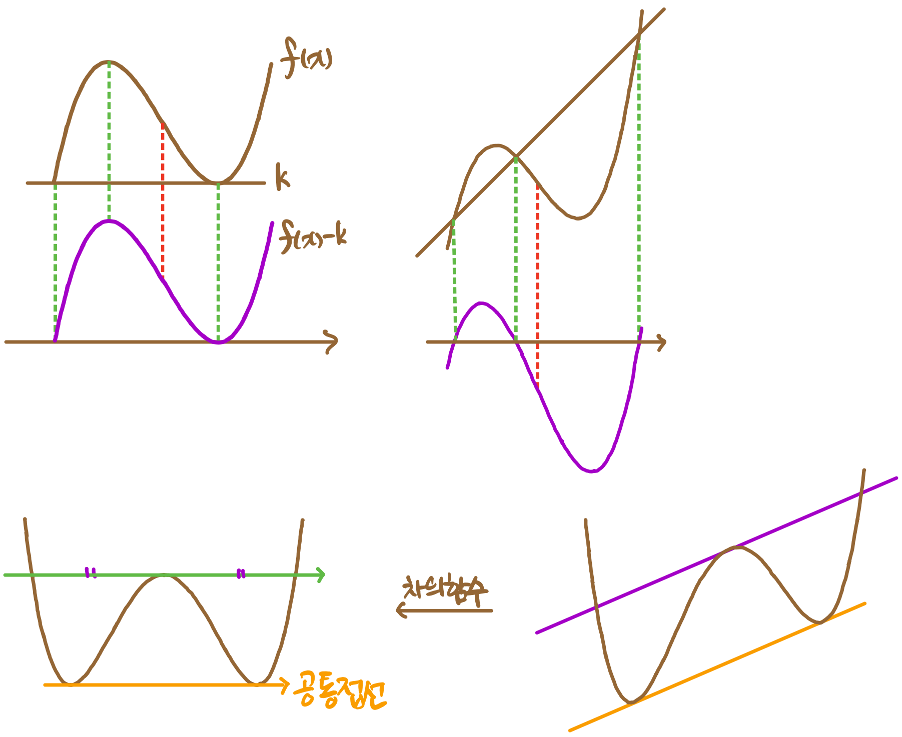


$\longrightarrow y=g(x)$는 $x=\frac{1}{2}$에 대하여 대칭

$\longrightarrow (-1, g(-1))$과 $(2, g(2))$에서의 접선이 만나는 점의 x좌표 $=\frac{1}{2}$

⋮

✱ 참고 : 차의함수



25

함수

$$f(x) = x^3 - 3px^2 + q$$

가 다음 조건을 만족시키도록 하는 25 이하의 두 자연수 p, q의 모든 순서쌍 (p, q)의 개수를 구하시오. [4점] 14

> (가) 함수 $|f(x)|$가 $x = a$에서 극대 또는 극소가 되도록 하는 모든 실수 a의 개수는 5이다.
> (나) 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 함수 $|f(x)|$의 최댓값과 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 함수 $|f(x)|$의 최댓값은 같다.

$f(x)$의 극댓값은 양수, 극솟값은 음수

$f'(x) = 3x^2 - 6px$
$= 3x(x-2p)$

극대 : $f(0) = q$

극소 : $f(2p) = q - 4p^3$ $(\because p > 0)$

$\longrightarrow q - 4p^3 < 0$

$\longrightarrow q < 4p^3$

$f(-1) = -1 - 3p + q$

$f(1) = 1 - 3p + q$

$\longrightarrow f(0) > f(1) > f(-1)$

$f(-2) = -8 - 12p + q$

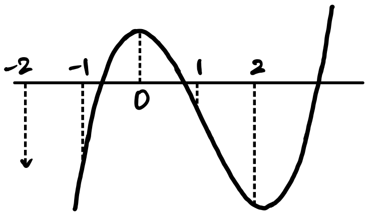
$f(2) = 8 - 12p + q$

$\longrightarrow f(0) > f(2) > f(-2)$

25

2022학년도 수능 예시문항(공통) 22번

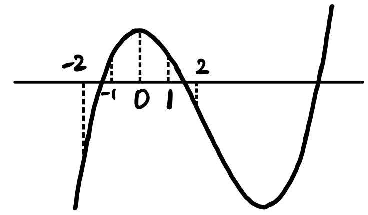
i) $[-1, 1]$에서 함수 $|f(x)|$의 최댓값 $= |f(-1)|$



$\longrightarrow$ $|f(-2)| = [-2, 2]$에서 함수 $|f(x)|$의 최댓값

$\longrightarrow$ 같지 않음. 모순

ii) $[-1, 1]$에서 함수 $|f(x)|$의 최댓값 $= |f(0)|$



$\longrightarrow$ 나)가 성립하려면 : $|f(-2)| \le |f(0)|$

$\longrightarrow$ $8 + 12p - q \le q$

$4 + 6p \le q$

$4 + 6p \le q < 4p^3$ $(\because q < 4p^3)$

$p=1 \longrightarrow 10 \le q < 4$ X

$p=2 \longrightarrow 16 \le q < 32 \longrightarrow 16 \le q \le 25$ 10개

$p=3 \longrightarrow 22 \le q < 108 \longrightarrow 22 \le q \le 25$ 4개

$p=4 \longrightarrow 28 \le q < 256$ X

$\therefore$ 14개

26 2021학년도 6월 평가원(나형) 30번

이차함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이고, 삼차함수 $g(x)$는 이차항의 계수가 0이다. 함수

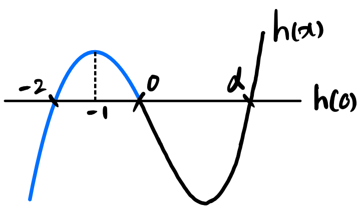
$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (x \le 0) \\ g(x) & (x > 0) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시킬 때, $h'(-3)+h'(4)$의 값을 구하시오. [4점] 38

(가) 방정식 $h(x)=h(0)$의 모든 실근의 합은 1이다.
(나) 닫힌구간 $[-2, 3]$에서 함수 $h(x)$의 최댓값과 최솟값의 차는 $3+4\sqrt{3}$이다.

$f(x)=a(x+1)^2+b \quad (a<0)$
$g(x)=px^3+qx+r$
↳ 기함수 $y=px^3+qx$ 에서 y축으로 r 만큼 평행이동

$\longrightarrow g(x)$는 $(0, r)$ 에 대하여 대칭



가) $\longrightarrow -2+0+\alpha=1$
$\therefore \alpha=3$

$\lim_{x\to 0-} h(x) = \lim_{x\to 0+} h(x) = h(0)$

$f(0)=g(0)=a+b$

$g(x)-(a+b)=p(x-3)x(x+3) \quad (\because (0, h(0))$ 점대칭$)$

$g(x)=p(x^3-9x)+a+b$
$g'(x)=3p(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$
$f'(x)=2a(x+1)$

$\lim_{x\to 0-} h'(x) = \lim_{x\to 0+} h'(x)$

$2a = -9p$

$\therefore p = -\frac{2}{9}a$

나) $\longrightarrow [-2, 3]$ 최댓값 : f의 극댓값
최솟값 : g의 극솟값

f 극대 : $f(-1) = b$
g 극소 : $g(\sqrt{3}) = -6\sqrt{3}p + a + b$
$= \frac{4}{3}\sqrt{3}a + a + b$

$b - \frac{4}{3}\sqrt{3}a - a - b = -a \times \frac{4\sqrt{3}+3}{3}$
$= 3 + 4\sqrt{3}$

$\therefore a = -3$

$\therefore f'(x) = -6(x+1)$
$g'(x) = 2(x^2-3)$

$\therefore h'(-3) + h'(4) = f'(-3) + g'(4)$
$= 38$

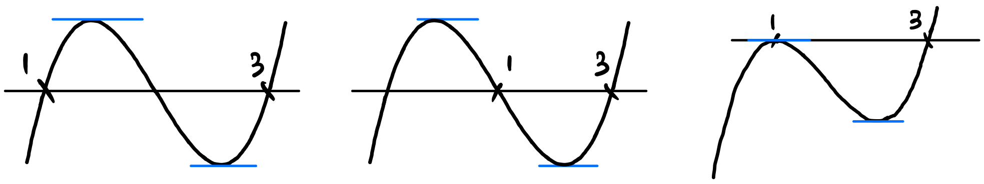
27

2021학년도 9월 평가원(나형) 30번

삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(1)=f(3)=0$
> (나) 집합 $\{x \mid x \geq 1$이고 $f'(x)=0\}$의 원소의 개수는 1이다.

상수 a에 대하여 함수 $g(x)=|f(x)f(a-x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $\dfrac{g(4a)}{f(0)\times f(4a)}$의 값을 구하시오. [4점] 105



→ 나) 조건을 만족시키려면 두번째 그림이 되어야 함.

$f(x)=p(x-1)(x-3)(x-k)$ $(k<1)$

$|f(x)f(a-x)|$ 미·불· 의심점

$\rightarrow f(x)f(a-x)=0$

$\rightarrow f(x)$ 미·불· 의심점 : $x=k, 1, 3$

→ 미가 → $f(x)f(a-x)$는 적어도 $(x-k)^2(x-1)^2(x-3)^2$ 을 인수로 가져야 함.

$\rightarrow f(a-x)$ 에 $(x-k)(x-1)(x-3)$ 가 있어야 한다.

$\therefore f(a-x)=-p(x-k)(x-1)(x-3)$
$\quad\quad\quad\;\; =-f(x)$

$\therefore f(x)=p(x+1)(x-1)(x-3)$, $a=2$

$g(x)=|f(x)f(a-x)|=|f(x)\cdot(-f(x))|=\{f(x)\}^2$

$\therefore \dfrac{g(4a)}{f(0)\times f(4a)}=\dfrac{g(8)}{f(0)\times f(8)}=105$

28

2021학년도 수능(나형) 30번

함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고, 함수 $g(x)$는 일차함수이다. 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\begin{cases}|f(x)-g(x)| & (x<1)\\ f(x)+g(x) & (x\geq 1)\end{cases}$$

이라 하자. 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, $h(0)=0$, $h(2)=5$일 때, $h(4)$의 값을 구하시오. [4점] 39

$h(0)=0 \longrightarrow f(0)=g(0)$

$|f(x)-g(x)|$: $x=0$ 에서 미.가.

$\therefore f(x)-g(x)=x^2(x-k)$

$\longrightarrow k=0 \longrightarrow f(x)-g(x)=x^3 \longrightarrow$ 실수 전체 집합에서 미.가.

$k\geq 1 \longrightarrow$ 실수 전체 집합에서 미.가.

i) $f(1)-g(1)\geq 0$

$\lim_{x\to 1-} h(x)=\lim_{x\to 1+} h(x)$

$f(1)-g(1)=f(1)+g(1)$

$g(1)=0$

$\lim_{x\to 1-} h'(x)=\lim_{x\to 1+} h'(x)$

$f'(1)-g'(1)=f'(1)+g'(1)$

$g'(1)=0$

$\longrightarrow g(x)$는 일차함수 $\longrightarrow$ 모순

ii) $f(1)-g(1)<0$

$\lim_{x\to 1-} h(x)=\lim_{x\to 1+} h(x)$

$g(1)-f(1)=f(1)+g(1)$

$f(1)=0$

28

2021학년도 수능(나형) 30번

$$\lim_{x\to1-} h'(x) = \lim_{x\to1+} h'(x)$$

$g'(1)-f'(1) = f'(1)+g'(1)$
$f'(1)=0$

$\longrightarrow f(x)=(x-1)^2(x-a)$
$\longrightarrow k\geq1$

$f(x)-g(x)=x^2(x-k)$
$f'(x)-g'(x)=3x^2-2kx$

$f(1)-g(1)=1-k$
$\longrightarrow g(1)=k-1 \quad (\because f(1)=0)$

$f'(1)-g'(1)=3-2k$
$\longrightarrow g'(1)=2k-3 \quad (\because f'(1)=0)$

$\therefore g(x)=(2k-3)(x-1)+k-1$

$h(2)=f(2)+g(2)$
$=\{f(2)-g(2)\}+2g(2)$
$=8-4k+6k-8$
$=2k=5$

$\therefore k=\frac{5}{2}$

$\therefore h(4)=f(4)+g(4)$
$=\{f(4)-g(4)\}+2g(4)$
$=64-16k+14k-20$
$=-2k+44$
$=39$

28

2021학년도 수능(나형) 30번

※ 참고: 절댓값 함수의 미분가능성

$|f(x)|$

- $f(x)$ 미.가.
  - $f(a)=0$, $f'(a)\neq 0$: $x=a$ 미.불. $(x-a)$ 인수 1개
  - $f(a)=0$, $f'(a)=0$: $x=a$ 미.가.

- $f(x)$ 미.불. — $|f(x)|$
  - $f(a)=0$ — 교점(x축 접점 X) : 미.불.
  - $f(x)$ 첨점, 불연속 : 직접 확인

29

2022학년도 6월 평가원(공통) 22번

삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
(나) 방정식 $f(x-f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

$f(1)=4$, $f'(1)=1$, $f'(0)>1$일 때, $f(0)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점] 61

sol1)

$f(x)=k(x-\alpha)(x-\beta)^2$ 또는 $f(x)=k(x-\alpha)^2(x-\beta)$ $(\alpha<\beta)$

$x-f(x)=t$

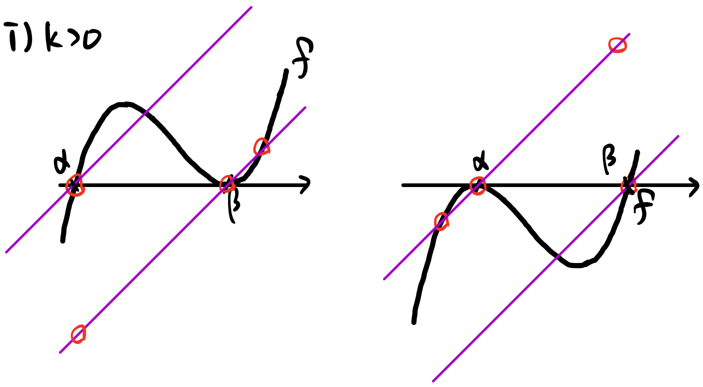
$f(t)=0$ 의 서로 다른 실근 개수 : 3

$\longrightarrow t=\alpha$ 또는 $t=\beta$

$\longrightarrow x-f(x)=\alpha$, $x-f(x)=\beta$

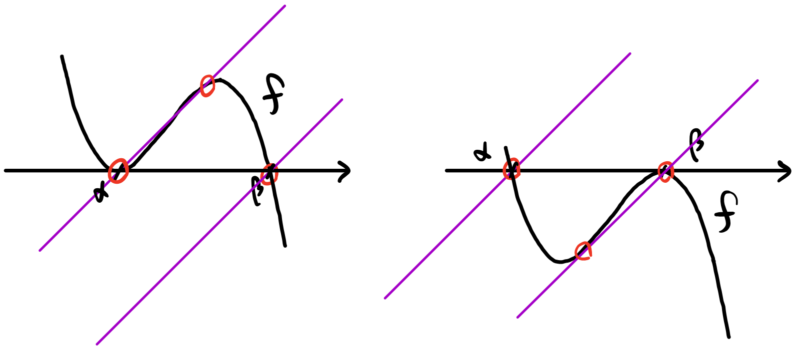
$\longrightarrow f(x)=x-\alpha$ 또는 $f(x)=x-\beta$

i) $k>0$



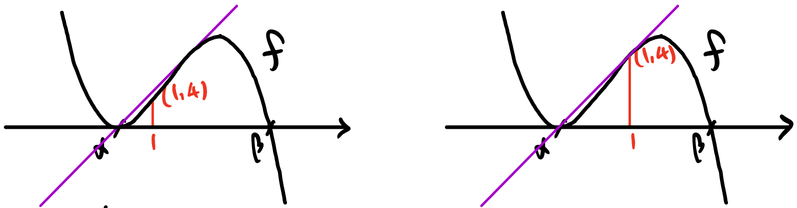
$\longrightarrow$ 모순

ii) $k<0$



$\longrightarrow f(1)=4,\ f'(1)=1$

$\longrightarrow$ 왼쪽 그림 $\left(f(x)=k(x-\alpha)^2(x-\beta)\right)$



$\downarrow$

$f'(0)>1$ 인 지점을 잡을 수 없음.

$\therefore\ y=x+\alpha$ 가 $(1,4)$ 지나야 함.

$\longrightarrow \alpha=-3$

$\therefore\ f(x)-(x+3)=k(x-1)^2(x+3)$

$f'(x)=2k(x-1)(x+3)+k(x-1)^2+1$

$f'(-3)=16k+1=0$

$\therefore\ k=-\frac{1}{16}$

$\therefore\ f(x)=-\frac{1}{16}(x-1)^2(x+3)+x+3$

$\therefore\ f(0)=\frac{45}{16}$

$\therefore\ p+q=61$

Sol2) 현장풀이

$f(x)=k(x-\alpha)^2(x-\beta)$

ㄴ: $x-f(x)=\alpha \longrightarrow f(x)=x-\alpha$

$x-f(x)=\beta \longrightarrow f(x)=x-\beta$

$k(x-\alpha)^2(x-\beta)=x-\alpha \longrightarrow k(x-\alpha)(x-\beta)=1$

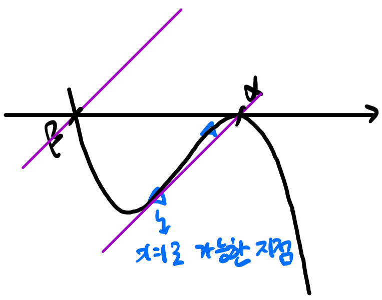
$k(x-\alpha)(x-\beta)=x-\beta \longrightarrow k(x-\alpha)^2=1$

$\longrightarrow$ α, β 가 아닌 실근이 1개 있어야 함.

$\longrightarrow$ $p>0$ 일 수 없음.

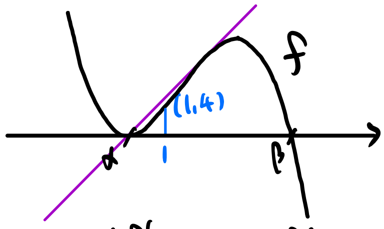
$k=\dfrac{-4}{(\beta-\alpha)^2}<0$ ($\because$ $k(x-\alpha)(x-\beta)=1$ 에 $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$ 대입)

i) $\alpha>\beta$



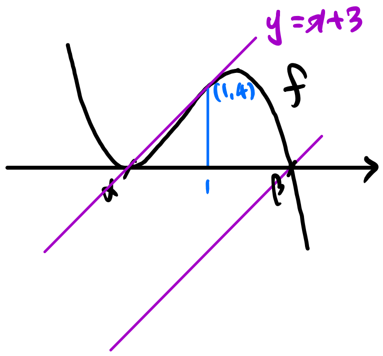
: $f(0)<0 \rightarrow$ 모순

ii) $\alpha < \beta$



$\because f'(0) < 1 \longrightarrow$ 모순

$\therefore$



$\longrightarrow$ 변곡점 $= x = -\frac{1}{3}$

$\longrightarrow \beta = 5$ ($\because$ 비율관계)

$\therefore f(x) = k(x+3)^2(x-5)$

$f(1) = -64k = 4$

$\therefore k = -\frac{1}{16}$

$\therefore f(0) = \frac{45}{16}$

$\therefore p+q = 61$

29

2022학년도 6월 평가원(공통) 22번

sol3) 수식적 풀이

⋮

$f(x)-(x-\alpha)=k(x-\alpha)(x-p)^2 \quad (k<0,\ \alpha<p)$

$f'(x)-1=2k(x-\alpha)(x-p)+k(x-p)^2$

$f'(1)-1=2k(1-\alpha)(1-p)+k(1-p)^2=0$

$k(1-p)(3-2\alpha-p)=0$

i) $p=3-2\alpha$

$f'(0)-1=k(2\alpha-3)^2+2k(-\alpha)(2\alpha-3)>0$
$-3k(2\alpha-3)>0$
$\longrightarrow k<0,\ \alpha>\frac{3}{2}$

$p=-2\alpha+3<\alpha$
$\longrightarrow$ 모순

$\therefore p=1$

⋮

30

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x) = f(x-3) \times \lim_{h \to 0+} \frac{|f(x+h)| - |f(x-h)|}{h}$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(5)$의 값을 구하시오. [4점] 108

> (가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
> (나) 방정식 $g(x) = 0$은 서로 다른 네 실근 α_1, α_2, α_3, α_4를 갖고
> $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 7$이다.

Sol.)

$$\lim_{h \to 0+} \frac{|f(x+h)| - |f(x-h)|}{h} = \lim_{h \to 0+} \frac{\{|f(x+h)| - |f(x)|\} + \{|f(x)| - |f(x-h)|\}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0+} \frac{|f(x+h)| - |f(x)|}{h} + \lim_{h \to 0+} \frac{|f(x)| - |f(x-h)|}{h}$$

= 우 미계 + 좌 미계.

$$= \begin{cases} 2f'(x) & (f(x) > 0) \\ 0 & (f(x) = 0) \\ -2f'(x) & (f(x) < 0) \end{cases} = h(x)$$

가) → $f(x-3)$: 연속

→ 불연속 의심 → $h(x)$

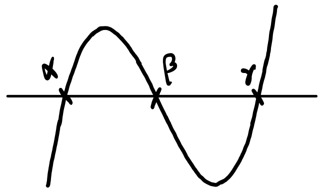
→ (연속 X 인 점) × 0 = 연속

→ 불연속 지점 × $f(x-3) = 0$

30

2022학년도 9월 평가원(공통) 22번

ⅰ) $f(x)=0$: 서로 다른 세 실근



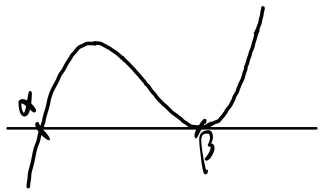
$\longrightarrow h(x)$: $x=\alpha, \beta, \gamma$ 에서 불연속

$f(x-3) \longrightarrow x=\alpha$ 대입

$\longrightarrow f(\alpha-3) \neq 0$ ($\because$ $f(x-3)$ 의 실근 : $x = \alpha+3,\ \beta+3,\ \gamma+3$)

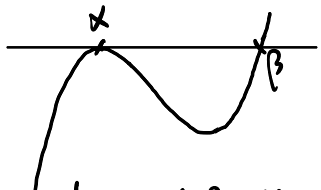
$\longrightarrow$ 모순

ⅱ) $f(x)=0$: 서로 다른 두 실근



$\longrightarrow h(x)$: $x=\alpha$ 에서 불연속

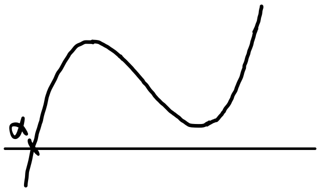
$f(\alpha-3) \neq 0$



$\longrightarrow h(x)$: $x=\beta$ 에서 불연속

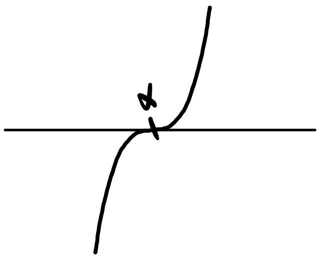
$f(\alpha-3) = f(\beta)$ 이면 만족

iii) $f(x)=0$: 한 실근



$\longrightarrow h(x)$: $x=\alpha$ 에서 불연속

$f(\alpha-3)\neq 0$

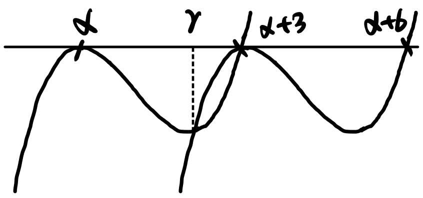


$\longrightarrow h(x)$: 실근 $x=\alpha$

$f(x-3)$: 실근 $x=\alpha+3$

$\longrightarrow$ 조건 (나) 모순

$\therefore f(x)=(x-\alpha)^2(x-\alpha-3)$



: 실근 $x=\alpha,\ \gamma,\ \alpha+3,\ \alpha+6$ 가짐.

실근 $x=\alpha,\ \gamma$ 는 $-2f'(x)=0$ 의 실근

$f'(x)=2(x-\alpha)(x-\alpha-3)+(x-\alpha)^2$

$f'(\gamma)=(\gamma-\alpha)(3\gamma-3\alpha-6)=0$

$\therefore \gamma = \alpha+2$

$\alpha+\alpha+2+\alpha+3+\alpha+6=7$

$\therefore \alpha=-1$

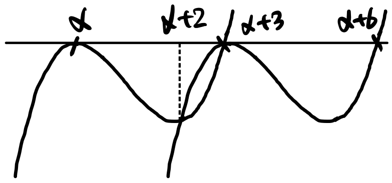
$\therefore f(x)=(x+1)^2(x-2)$

$\therefore f(5)=108$

Sol₂) 현장풀이

$f(x)=0$: 3실근 $\longrightarrow$ g 불연속

$f(x)=0$: 1실근 $\longrightarrow$ 나) 모순 또는 g 불연속



($\because$ 비율관계)

⋮

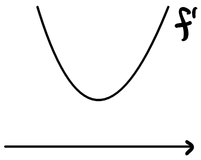
31 2022학년도 수능(공통) 22번

최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 방정식 $f'(x)=0$이 닫힌구간 $[t, t+2]$에서 갖는 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

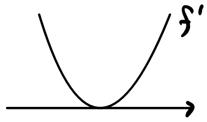
> (가) 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{t\to a+} g(t) + \lim_{t\to a-} g(t) \le 2$이다.
>
> (나) $g(f(1)) = g(f(4)) = 2$, $g(f(0)) = 1$

$f(5)$의 값을 구하시오. [4점] 9

sol.)

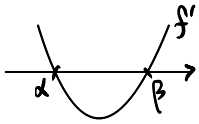


: g( ) =2 일 수 없음.



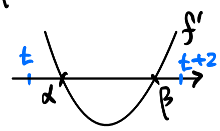
: $\lim_{t\to a+} g(t) + \lim_{t\to a-} g(t) = 4$ 일 때 있음.

∴



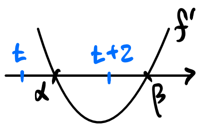
위와 같은 꼴이여야 함.

i) $\beta-\alpha < 2$



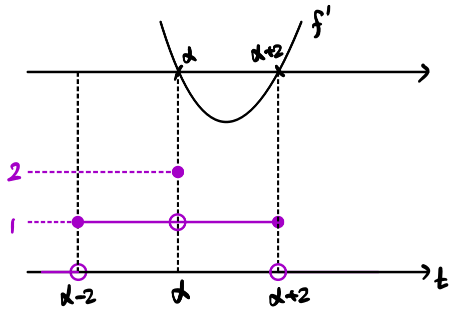
$\lim_{t\to a+} g(t) + \lim_{t\to a-} g(t) = 4$ 일 때 있음.

ii) $\beta-\alpha > 2$



g( ) = 0 또는 1

$\therefore \beta - \alpha = 2$



$\longrightarrow$ 가) 성립

$f(1) = f(4) = \alpha$

$\alpha - 2 \le f(0) < \alpha$ 또는 $\alpha \le f(0) < \alpha + 2$

$\therefore f'(x) = \frac{3}{2}(x-\alpha)(x-\alpha-2)$

$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}(\alpha+1)x^2 + \frac{3}{2}(\alpha^2+2\alpha)x + C$

$f(1) = f(4)$

$\longrightarrow$ $\alpha = 1$ 또는 $\alpha = 2$

i) $\alpha = 2$

$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{9}{2}x^2 + 12x + C$

$f(1) = C + 8 = 2$ $(\because f(1) = f(4) = \alpha)$

$\therefore C = -6$

$g(f(0)) = g(-6) = 0$

$\longrightarrow$ 모순

ii) $\alpha=1$

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2+\frac{9}{2}x+C$$

$f(1)=C+2=1$

$\therefore C=-1$

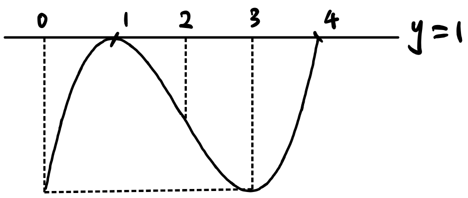
$g(f(0))=g(-1)=1$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2+\frac{9}{2}x-1$$

$\therefore f(5)=9$

Sol2) 현장풀이 — 직관...

$g(f(1))=g(f(4))$: $f(1)=f(4)$ $\longrightarrow$ 극값...?



$$\longrightarrow f(x)=\frac{1}{2}(x-1)^2(x-4)+1$$

$\therefore f(5)=9$

타짜

: 기출 밑장빼기

수2

베이즈 지음