제 2 교시

2022학년도 미니 파이널 1회

수학 영역

홀수형

성명			수험 번호					—				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

전력으로

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통 과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

팀 우주설

제 2 교시

수학 영역

1. 함수 $f(x)$가 다음과 같다.

$$f(x) = \begin{cases} -x+2 & (x \leqq 1) \\ x^3 & (x > 1) \end{cases}$$

모든 실수 x 에 대하여 부등식

$$f(x) \geqq k(x-1)+1$$

이 성립하도록 하는 실수 k 의 최댓값과 최솟값의 합은?

[3점][2003년 9월 가나21]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

2. x 에 대한 삼차방정식 $\frac{1}{3}x^3-x=k$ 가 서로 다른 세 실근 α, β, γ를 가진다. 실수 k에 대하여 $|\alpha|+|\beta|+|\gamma|$의 최솟값을 m이라 할 때, m^2의 값을 구하시오.

[4점][2005학년도 수능 가24]

3. 최고차항의 계수가 4인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

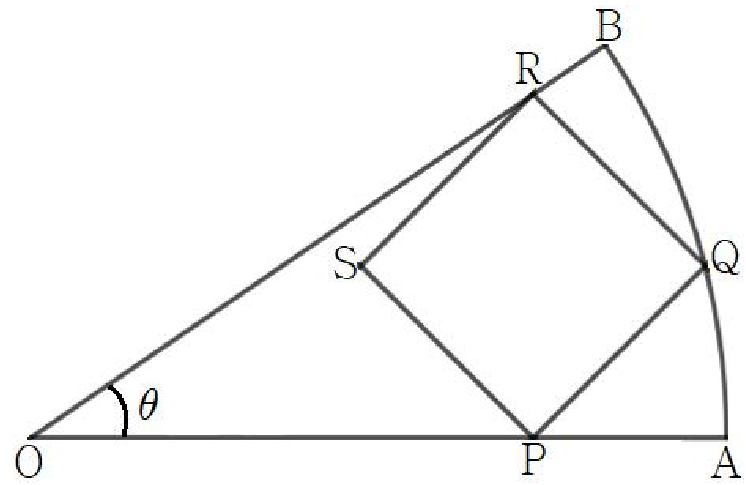
$$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt - xf(x)$$

라 하자. 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\le g(3)$이고 함수 $g(x)$는 오직 1개의 극값만 가진다. $\int_0^1 g'(x)\,dx$의 값은?

[4점][2020년 10월 나20]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

4. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 θ인 부채꼴 OAB에 대하여 꼭짓점 P, Q, R이 각각 선분 OA, 호 AB, 선분 OB 위에 있고 $\angle\mathrm{OPS}=\angle\mathrm{APQ}$인 정사각형 PQRS의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta^n}=m$일 때, $m+n$의 값은? (단, n은 자연수이고 m은 0이 아닌 상수이다.) [4점]



① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

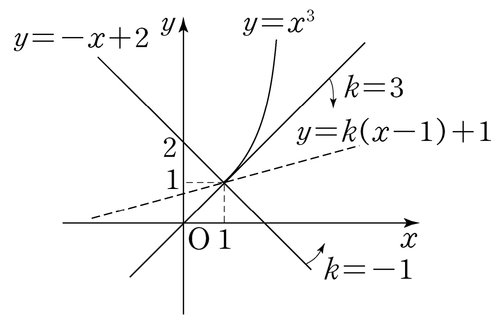
5. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 $x=t-1$에서 $x=t$까지의 곡선 $y=f(x)$의 길이 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)$는 극솟값 0을 갖는다.
(나) $f'(t)\times g'(t)\geq 0$을 만족시키는 t의 범위는 $t\geq 0$이다.

$f(2)=k$라 할 때, $12k$의 값을 구하시오.

1) ⑤

모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geqq k(x-1)+1$이 성립하려면 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=k(x-1)+1$보다 항상 위쪽에 있어야 한다.



직선이 k의 값에 관계없이 (1, 1)을 지나므로 위의 그림과 같이 움직여보면 기울기가 -1인 직선의 기울기보다 크거나 같을 때, 즉 $k \geqq -1$

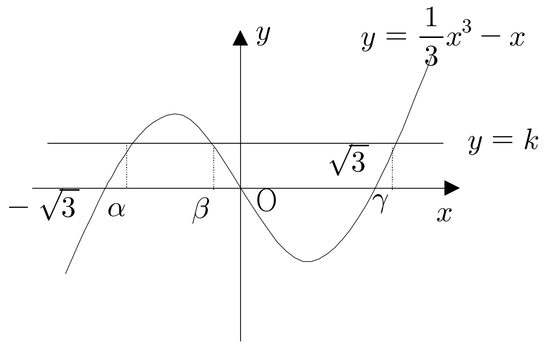
$y=x^3$ 위의 점 (1, 1)에서의 접선의 기울기 3보다 작거나 같을 때, 즉 $k \leqq 3$

$\therefore -1 \leqq k \leqq 3$

따라서, k의 최댓값과 최솟값의 합은 2이다.

2) 12

$y=\frac{1}{3}x^3-x$라 놓으면 곡선 $y=\frac{1}{3}x^3-x$과 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 주어진 삼차방정식의 세 실근이다.



곡선 $y=\frac{1}{3}x^3-x$는 원점에 대하여 대칭이며

$\frac{1}{3}x^3-x=0$에서 $x=-\sqrt{3}$, 0, $\sqrt{3}$

이 때, $\alpha<\beta<\gamma$ 라 해도 문제의 뜻에 어긋나지 않으며

$-\sqrt{3} \leq \alpha < \beta \leq 0 < \sqrt{3} \leq \gamma$

한편,

$\frac{1}{3}x^3-x-k=\frac{1}{3}(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$에서

$\alpha+\beta+\gamma=0$

$\therefore |\alpha|+|\beta|+|\gamma|=-\alpha-\beta+\gamma=2\gamma \geqq 2\sqrt{3}$

$\therefore m^2=(2\sqrt{3})^2=12$

3) ②

[출제의도] 정적분과 미분의 관계를 이용하여 정적분의 값을 구한다.

$g'(x)=f(x)-\{f(x)+xf'(x)\}=-xf'(x)$

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 4이므로 $f'(x)$는 이차항의 계수가 12인 이차함수이다.

그러므로 $g'(x)=-xf'(x)$에서 $g'(x)$는 최고차항의 계수가 -12인 삼차함수이다.

또, 모든 실수 x에 대하여 $g(x) \leq g(3)$이므로 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 최댓값을 가지고 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 극값을 가진다. 즉, $g'(3)=0$

그러므로 $f'(3)=0$에서 $g'(x)=-12x(x-3)(x-a)$

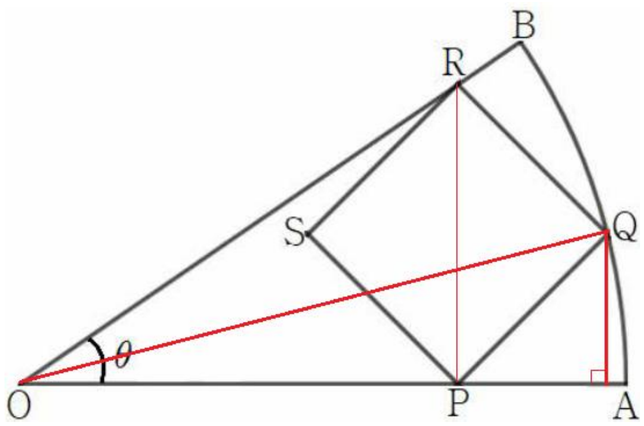
사차함수 $g(x)$가 오직 1개의 극값만 가지므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극값을 가질 수 없다. 즉, $a=0$

$g'(x)=-12x^2(x-3)=-12x^3+36x^2$

따라서 $\int_0^1 g'(x)\,dx=\left[-3x^4+12x^3\right]_0^1=9$

4) ③

[출제의도] 피타고라스, 극한값의 연산성질



구하고자 하는 정사각형의 한 변의 길이 x에 대하여

$\mathrm{RP}=\sqrt{2}x$이고, 삼각비에 의해 $\overline{\mathrm{OP}}=\frac{\sqrt{2}x}{\tan\theta}$

$\overline{\mathrm{QA}}=\frac{\sqrt{2}}{2}x$이다.

OQ를 빗변으로 하는 직각삼각형에서 피타고라스를 하면,

$1^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{\tan\theta}x+\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2$

$1^2=x^2\left(\frac{2}{\tan^2\theta}+\frac{2}{\tan\theta}+1\right)$

$\lim_{\theta\to0+}1^2=\lim_{\theta\to0+}\frac{x^2}{\theta^n}\times\lim_{\theta\to0+}\theta^n\left(\frac{2}{\tan^2\theta}+\frac{2}{\tan\theta}+1\right)$

$n=2$일 때,

$1=\lim_{\theta\to0+}\frac{x^2}{\theta^n}\times2$

$m=\frac{1}{2}$

5) 30

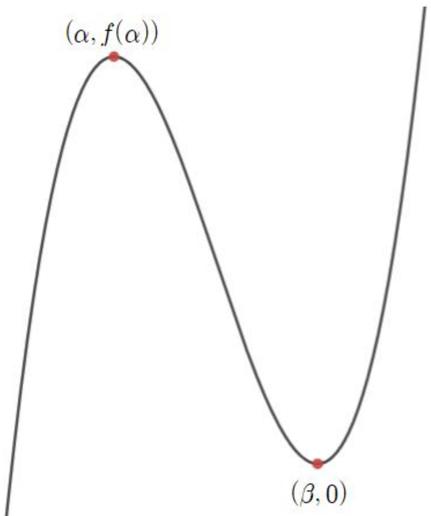
$g'(t)$의 부호변화를 수식으로 보는 법

$g(t)=\int_{t-1}^{t}\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$에서 $g'(t)=\sqrt{1+f'(t)^2}-\sqrt{1+f'(t-1)^2}$

$|f'(t)|>|f'(t-1)|$이면 $g'(t)>0$이고

$|f'(t)|<|f'(t-1)|$이면 $g'(t)<0$이다.

삼차함수 $f(x)$에 대하여 (나)를 해석해보자.



$t<\alpha$일 때, $f'(t)\geq 0$이고 $|f'(t)|<|f'(t-1)|$이므로 $g'(t)<0$

(나)조건을 만족시키지 않는다.

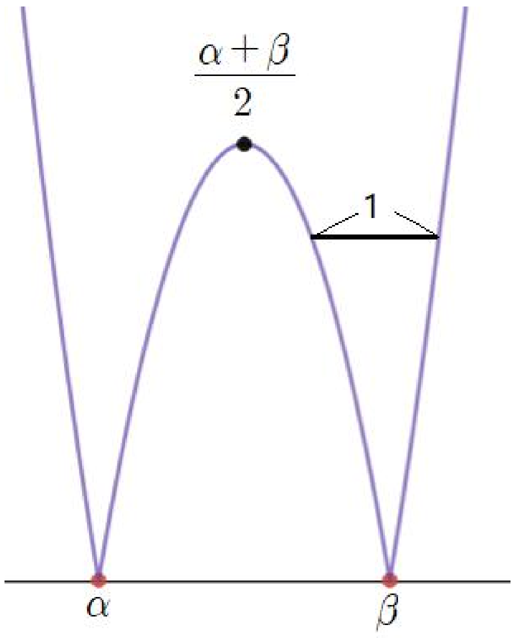
$\beta<t-1<t$일 때, $f'(t)\geq 0$이고 $|f'(t)|>|f'(t-1)|$이므로

$g'(t)>0$가 성립 $1+\beta<t$일 경우 성립하는 것을 알아냈는데

여기서 $t=0$의 위치를 추론하자.

$\beta<0$이라면, 정확히 $t\geq 0$에서 $f'(t)\times g'(t)\geq 0$이려면,

우선 $|f'(0)|=|f'(-1)|$이어야 한다.



그리고 $t\leq\beta$인 어떤 경우에서도 $f'(t)\times g'(t)\geq 0$인 것이 없어야 한다.

그런데 $t=\alpha$이면 $f'(\alpha)=0$이므로 $f'(t)\times g'(t)\geq 0$를 만족시키므로

모순이 발생하며, $t\geq 0$라는 범위 자체가 $t=\alpha$인 상황을

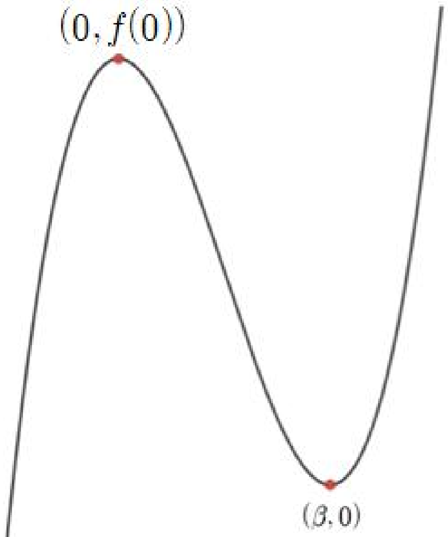
포함해야 하므로 $0\leq\alpha$임을 알 수 있다.

그런데 $0<\alpha$일 경우

$t=0$에서 $f'(t)>0$이고 $|f'(t)|<|f'(t-1)|$이므로 $g'(t)<0$이다.

따라서 $\alpha=0$이어야 한다.

여기까지의 상황을 정리하자.



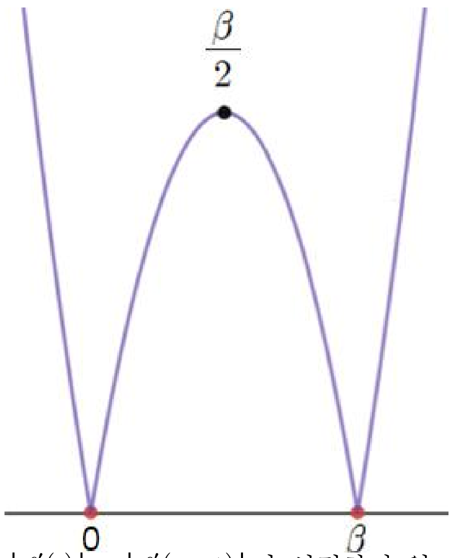
열린구간 $(0,\beta)$에서 t를 움직여보며 $f'(t)\times g'(t)\geq 0$가

항상 성립하는지 알아보자.

$f'(t)<0$이므로 $g'(t)\leq 0$이어야 한다.

그러므로 $|f'(t)|\leq|f'(t-1)|$여야 하는데

여기서 $\beta>1$이라면, 반드시 $t=1$일 때,



$|f'(t)|\leq|f'(t-1)|$이 성립하지 않고 조건을 만족시키지 않는다.

그렇다고 $\beta<1$이라면, $t=\beta+h$에서 (h는 충분히 작은 양수)

$f'(t)>0$이므로 $g'(t)\geq 0$여야 한다. 그러나 $|f'(t)|>|f'(t-1)|$를

만족하지 않는 부분이 존재한다.

$\beta=1$이라면, 모든 조건을 만족시킨다.

따라서 $f'(x)=3x(x-1)$에 대하여 $(1,0)$을 지나므로

$f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}$, $f(2)=\frac{5}{2}$

$12f(2)=30$

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.