제 2 교시

2022학년도 대학수학능력시험 대비 랑데뷰 7월2차

수학 영역

성명	

수험 번호					—				

1. 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확히 쓰시오.
2. 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

2021년 7월 인천 광역시 교육청 99% 싱크로율-랑데뷰

3. 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.
4. 단답형 답의 숫자에 ‘0’이 포함되면 그 ‘0’도 답란에 반드시 표시하시오.
5. 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
6. 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

공통 과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

공통과목 1~8쪽, 선택과목 확률과 통계 9~12쪽, 미적분 13~16쪽, 기하 17~20쪽

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

송원학원 황보백T

2022학년도 대학수학능력시험 대비 랑데뷰 7월2차

제 2 교시　수학 영역

5지선다형

1. $8^{\frac{1}{3}}+\log_3 81$의 값은? [2점] [랑데뷰 수학]

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

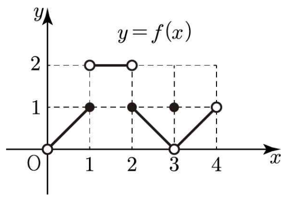
2. $\int_{-1}^{1}(x^3+x)dx$의 값은? [2점] [랑데뷰 수학]

① -2　② 0　③ 2　④ 4　⑤ 6

3. 함수 $f(x)=x^3+ax^2+x$에 대하여 $f'(1)=0$일 때, 상수 a의 값은? [3점] [랑데뷰 수학]

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

4. 열린구간 $(0,4)$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같다.



$\lim_{x\to1-}f(x)+\lim_{x\to2+}f(x)+f(3)$의 값은? [3점] [랑데뷰 수학]

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

5. 부등식 $9^{3x-4} \le \left(\frac{1}{3}\right)^{2x^2}$ 을 만족시키는 정수 x의 개수는? [3점] [랑데뷰 수학]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

6. $-\sin(-\theta)-\cos(\pi-\theta)=\frac{4}{3}$ 일 때, $\sin\theta\cos\theta$의 값은? [3점] [랑데뷰 수학]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{7}{18}$ ③ $\frac{4}{9}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{11}{18}$

7. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=2$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} \dfrac{a_n}{3a_n-2} & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ 2a_n & (n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $\sum_{n=1}^{64} a_n$의 값은? [3점] [랑데뷰 수학]

① 66 ② 68 ③ 70 ④ 72 ⑤ 74

8. 공차가 0아닌 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$S_9 = 108,\ {a_5}^2 + {a_6}^2 = {a_7}^2 + {a_8}^2$$

일 때, a_4의 값은? [3점] 〔랑데뷰 수학〕

① 16　② 18　③ 20　④ 22　⑤ 24

9. 2이상의 두 자연수 a, n에 대하여 $(\sqrt[n]{a})^4$의 값이 자연수가 되도록 하는 n의 최댓값을 $f(a)$라 하자. $f(8)+f(9)+f(81)$의 값은? [4점] 〔랑데뷰 수학〕

① 28　② 30　③ 32　④ 34　⑤ 36

10. $0 \le x < 2\pi$일 때, 방정식

$$6\cos^2 x - \sin x - 5 = 0$$

의 모든 해의 합은? [4점] 〔랑데뷰 수학〕

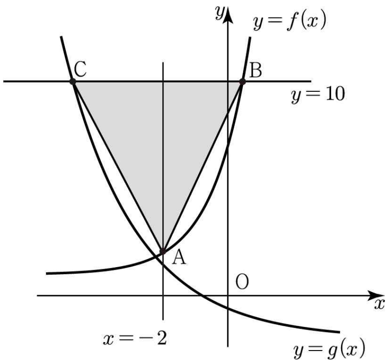
① $\frac{9}{2}\pi$　② 4π　③ $\frac{7}{2}\pi$　④ 3π　⑤ $\frac{5}{2}\pi$

11. $a>1$인 실수 a에 대하여 두 함수

$$f(x)=a^{2x+4}+1,\ g(x)=a^{1-x}-2$$

이 있다. 직선 $x=-2$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 점을 A라 하고, 직선 $y=10$과 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 삼각형 ACB의 넓이가 20일 때, a^4의 값은? [4점] [랑데뷰 수학]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10



12. 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & (x<1,\ 1<x<2)\\ 2 & (x=1,\ x\ge 2)\end{cases}$$

이고 다항함수 $g(x)$는 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{g(x)}{x^4-4x^2+1}=\lim_{x\to 2}\dfrac{g(x)}{x-2}=1$을 만족시킨다. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $g(0)$의 값은? [4점] [랑데뷰 수학]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

13. 다음은 수열 $\{a_n\}$이

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = 2a_n + \frac{2^n}{n(n+1)}\ (n = 1, 2, 3, \cdots)\cdots(*)$$

을 만족시킬 때 a_8을 구하는 과정이다.

> $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$이므로 (*)로부터
>
> $a_{n+1} + \frac{2^n}{n+1} = 2(a_n + \boxed{(가)})\ (n \geq 1)$
>
> 가 성립한다. $b_n = a_n + \boxed{(가)}$ 라 하면
>
> $b_n = \boxed{(나)}$
>
> 이다. 따라서
>
> $a_n = \boxed{(다)}$ 이다.
>
> 그러므로 $a_8 = 250$이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$ 이라 할 때, $f(4)+g(4)+h(4)$의 값은? [4점] [랑데뷰 수학]

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

14. 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = -4t^3 + 16t$$

일 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]
[랑데뷰 수학]

〈보 기〉

ㄱ. 점 P가 출발한 후 움직이는 방향이 바뀔 때 점 P의 위치는 16이다.
ㄴ. 점 P가 시각 $t=0$일 때 부터 가속도가 -92가 될 때까지 움직인 거리는 31이다.
ㄷ. 점 P가 움직이기 시작한 뒤 다시 원점에 도착했을 때, 가속도의 크기는 80이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 $g(0)=0$인 함수 $g(x)$에 대하여

$$xg(x)=\int_0^x tf(t)dt+f(x)$$

이 성립할 때, 함수 $xg(x)$의 도함수의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.
두 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 함수 $h(x)$를

$$h(x)=f(x)-g'(x)$$

라 할 때, $\int_0^{10}\{|h(x)|-h(x)\}dx$의 값은? [4점] 〔랑데뷰 수학〕

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

단답형

16. 두 상수 a, b에 대하여 $\lim_{x\to 1}\frac{5x-a}{x-1}=b$ 일 때, $a+b$의 값을 구하시오. [3점] 〔랑데뷰 수학〕

17. 함수 $f(x)$가

$$f'(x)=x^3+2x,\ f(0)=3$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점] 〔랑데뷰 수학〕

18. 함수 $f(x)=x^3$의 $x=a$에서의 미분계수와 닫힌구간 $[a,\ 2]$에서의 평균변화율이 같도록 하는 상수 a에 대하여 a^2의 값을 구하시오. (단, $a<2$) [3점] [랑데뷰 수학]

19. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

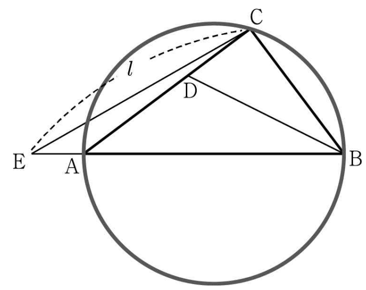
(가) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)-2}{x^2-x}=3$
(나) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h}{g(1+h)-1}=\dfrac{1}{3}$

함수 $h(x)=f(x)g(x)$에 대하여 $h'(1)$의 값을 구하시오. [3점] [랑데뷰 수학]

20. 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점 C에 대하여

$$\overline{\mathrm{BC}}=6,\ \sin(\angle \mathrm{ABC})=\frac{4}{5}$$

선분 AC를 5 : 3로 내분하는 점을 D라 하자. 직선 AB위에 $\overline{\mathrm{DB}}=\overline{\mathrm{DE}}$인 점 E에 대하여 선분 EC의 길이를 l이라 할 때, $l^2=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점] [랑데뷰 수학]



21. 공차가 d이고 모든 항이 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $d \le a_1 \le 2d$
> (나) 어떤 자연수 k에 대하여 세 항 a_2, a_k, a_{5k-3}이 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

$152 \le a_{21} \le 162$일 때, a_{10}의 값을 구하시오. [4점] 〔랑데뷰 수학〕

22. $a_1 = 0$, $a_{n+1} = a_n + 2^n$을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 정의역이 $\{x \mid 0 \le x \le 94\}$인 함수 $f(x)$를

$$f(x) = \frac{1}{3^{n-2}} \sin\left(\frac{\pi(x-a_n)}{2^{n-1}}\right) \ (a_n \le x < a_{n+1})$$

으로 정의한다. 〔랑데뷰 수학〕

자연수 k에 대하여 직선 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{k-2}$와 함수 $y = |f(x)|$의 그래프가 만나는 점의 개수를 a_k라 할 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값을 구하시오. (단, n은 자연수이다.) [4점]

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

1. 2022학년도 랑데뷰 컨텐츠(파일 판매)
(1) 매주 모의고사 (월4회 연32회)
(2) 일일학습지 (월20회, 연160회)
(3) 수특, 수완 변형
(4) 주요모고 변형
[문의] 카톡 : hbb100

2. 2021년 랑데뷰 출간물 (ALL 오르비 출판)
(1) N제 (1월~5월)
수학I, 수학II, 확률과통계, 미적분, 기하

(2) 상수 (4월, 8월)
고등수학(상), 수학I, 수학II, 고등수학(하)

(3) 봉투모의고사 (7월~9월)
랑데뷰☆수학 모의고사
시즌1
시즌2
시즌3

네이버 검색 : 황보백

랑데뷰 출간 교재 소개

(yes24, 알라딘, 오르비 등에 주문가능)

-랑데뷰세미나- (전국 서점 판매중)

황보백 선생이 그동안 배우고 연구한 고교 입시 수학에 필요한 심화 개념 및 스킬들을 모아 놓은 교재
[고등수학] [수학I] [수학II] [미적분] [확률과통계] [기하]

순으로 현 교육과정에 맞게 정리되어 있다.
장점:고교수학의 대부분의 스킬이 담겨 있다.오르비 편집실에서 깔끔하게 편집해 주셔서 오르비에서 판매되었던 전자책보다 가독성이 좋아졌고 검토진 선생님들의 꼼꼼한 검토로 오타,오류 수정되었으며 보기 불편한 그림은 대부분 수정되어 완성도가 높아졌다.
많은 가르침을 주신 선-후배 강사분들과 특히 수강모 선생님들께 감사함을 전합니다. 입시수학을 연구하는 모든 선생님들께 이 책을 바칩니다.

-랑데뷰N제- 수학I,수학II,확통,미적분,기하

수능 대비 수학 문제집**랑데뷰N제 시리즈**는 다음과 같은 난이도 구분으로 구성됩니다. (괄호안 단어가 교재명)
1단계-쉬운3점 어려운3점(쉬삼어삼) (오르비-전자책)
⇨평가원 기출(6,9,11월)+변형 자작 문항(5:5정도)
2단계-쉬운4점 어려운4점(쉬사준킬) (오르비-종이책)
⇨변형 자작 문항(100%)
3단계-킬러(킬러극킬) (오르비-종이책)
⇨변형 자작 문항(100%)
이 판매페이지는 랑데뷰N제중[수학I]과[수학II]의2단계[쉬사준킬], 3단계[킬러극킬]에 관한 내용입니다.
(1)랑데뷰N제 수학I- 쉬사준킬
쉬운4점과 준킬러급 난이도 문항의 변형 자작 240문항이 출제유형별로 배치되어 있음
교재 활용방법
①기출 변형 문제가 많아 기출문제집n회독 후 풀어보면 좋겠습니다.
②기출문제집과 병행해도 좋습니다.기출1단원 완료 후 랑데뷰 쉬사준킬 1단원 풀기
③기출 문항을 학교,학원,과외,인강 등을 통해 수업 듣는 학생은 예습 복습용으로 활용하면 효과적입니다.
④학원 교재로 사용되면 효과적입니다.
(2)랑데뷰N제 수학I- 킬러극킬
킬러급 난이도100제
교재 활용방법
①중위권은 하루1~2문제씩 꾸준히 풀어보길 권장합니다.
②상위권도 쉬사준킬 끝내고 이어서 풀어보길 권장합니다.
(3)랑데뷰 N제 수학II- 쉬사준킬
쉬운4점과 준킬러급 난이도 문항의 변형 자작 200문항이 출제유형별로 배치되어 있음
교재 활용방법
①기출 변형 문제가 많아 기출문제집n회독 후 풀어보면 좋겠습니다.
②기출문제집과 병행해도 좋습니다.기출1단원 완료 후 랑데뷰 쉬사준킬 1단원 풀기
③기출 문항을 학교,학원,과외,인강 등을 통해 수업 듣는 학생은 예습 복습용으로 활용하면 효과적입니다.
④학원 교재로 사용되면 효과적입니다.
(4)랑데뷰 N제 수학II- 킬러극킬
킬러급 난이도110제
교재 활용방법
①중위권은 하루1~2문제씩 꾸준히 풀어보길 권장합니다.
②상위권도 쉬사준킬 끝내고 이어서 풀어보길 권장합니다.

<출간예정>
랑데뷰 상수 시리즈
랑데뷰 모의고사 시즌1,2,3

랑데뷰-집필진

[강동희 강동희수학교습소 010-7292-1692]
[김 수 오라클수학교습소 010-5273-7632]
[김은수 샤인수학학원 010-5687-5722]
[김효경 수학의 정원 010-6369-6416]
[박광식 프라하 수학학원 010-3257-5452]
[박용진 샤인수학학원 010-6512-7443]
[서영만 다니엘 영수학원 010-9244-0910]
[서태욱 태강학원 010-3022-6918
답길학원 010-3022-6918]
[오세준 오엠수학교습소 010-8858-9561]
[오은경 오은경수학 010-4534-5129]
[우성근 우성근수학 010-3040-0005]
[유승희 오름학원 010-5298-1393]
[이재호 이재호수학학원 010-4527-1703]
[이정배 김이김학원 010-9866-2508
멘토수학 010-9866-2508]
[이지웅 감수학 010-9834-0904]
[이지훈 SY영수학원 010-8598-5284]
[이태형 가토수학과학학원 gatoms@kakao.com]
[이현일 샤인수학학원 010-2681-9501]
[장선정 오름수학 010-4894-1764]
[장세완 장선생수학 010-2568-0049]
[장정보 장정보수학교습소 010-9504-5938]
[전희종 범어수학 010-9721-9797]
[정일권 이미지매쓰학원 010-2739-6021]
[조필재 샤인수학학원 053-754-3121]
[조남웅 STM수학학원 010-2024-0707]
[최병길 광주과학고등학교 010-4591-0583]
[최성훈 최성훈수학교습소 010-2680-5281]
[최수영 수학만영어도학원 053-856-1158,
필즈수학학원 054-771-4301]
[최재영 셰르파수학교습소 010-2577-4221]
[최현정 MQ멘토수학 010-2655-9279]
[한정아 한정아수학교습소 010-7220-6368]
[홍지석 홍수학 학원 010-7136-5713]
[황수영 JS수학연구소 010-6780-8242]

2022학년도 수학영역 랑데뷰 7월-2차 빠른답

공통과목

1	⑤	2	②	3	①	4	⑤	5	③
6	②	7	④	8	③	9	⑤	10	②
11	③	12	①	13	②	14	④	15	⑤
16	10	17	11	18	1	19	9	20	473
21	76	22	159						

2022학년도 수학영역 랑데뷰 7월-2차-풀이

공통과목

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

1) 정답 ⑤
[출제자 : 황보백 송원학원]

$8^{\frac{1}{3}}+\log_3 81=(2^3)^{\frac{1}{3}}+\log_3 3^4=2+4=6$

2) 정답 ②
[출제자 : 황보백 송원학원]

$y=x^3+x$는 원점 대칭 함수이므로 $\int_{-1}^{1}(x^3+x)dx=0$

3) 정답 ①
[출제자 : 황보백 송원학원]

$f(x)=x^3+ax^2+x$
$f'(x)=3x^2+2ax+1$
$f'(1)=3+2a+1=0$
$2a=-4$
$\therefore\ a=-2$

4) 정답 ⑤
[출제자 : 황보백 송원학원]

$\lim_{x\to 1-}f(x)+\lim_{x\to 2+}f(x)+f(3)$
$=2+1+1=4$

5) 정답 ③
[출제자 : 황보백 송원학원]

$9^{3x-4}=(3^2)^{3x-4}=3^{6x-8}$

$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x^2}=(3^{-1})^{2x^2}=3^{-2x^2}$

이므로 주어진 부등식 $9^{3x-4}\le\left(\frac{1}{3}\right)^{2x^2}$ 은

$3^{6x-8}\le 3^{-2x^2}$ …㉠

이때 밑이 1보다 크므로 부등식 ㉠의 해는

$6x-8\le -2x^2$

$x^2+3x-4\le 0$

$(x+4)(x-1)\le 0$

$-4\le x\le 1$

따라서 정수 x의 값은 -4, -3, -2, -1, 0, 1로 그 개수는 6이다.

6) 정답 ②

[출제자 : 황보백 송원학원]

$-\sin(-\theta)-\cos(\pi-\theta)=\sin\theta+\cos\theta=\frac{4}{3}$ 에서

양변을 제곱하면 $1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{16}{9}$ 에서

$\sin\theta\cos\theta=\frac{7}{18}$

7) 정답 ④

[출제자 : 황보백 송원학원]

$a_1=2$ 이므로

$a_2=\frac{a_1}{3a_1-2}=\frac{2}{6-2}=\frac{1}{2}$

$a_3=2a_2=1$

$a_4=\frac{a_3}{3a_3-2}=\frac{1}{3-2}=1$

$a_5=2a_4=2$

⋮

이때, $a_n=a_{n+4}$ (n은 자연수) 이므로

$a_1+a_2+a_3+a_4=a_5+a_6+a_7+a_8=\cdots$

$=a_{61}+a_{62}+a_{63}+a_{64}=\frac{9}{2}$

따라서 $\sum_{n=1}^{64}a_n=16\times\frac{9}{2}=72$

8) 정답 ③

[출제자 : 황보백 송원학원]

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$S_9=108$에서 $\frac{9(2a+8d)}{2}=108$

$a+4d=12$

$\therefore\ a_5=12$

${a_5}^2+{a_6}^2={a_7}^2+{a_8}^2$에서

${a_5}^2+(a_5+d)^2=(a_5+2d)^2+(a_5+3d)^2$

$12^2+(12+d)^2=(12+2d)^2+(12+3d)^2$

$24d+d^2=48d+4d^2+72d+9d^2$

$12d^2+96d=0$, $12d(d+8)=0$

$d\ne 0$이므로 $d=-8$

따라서 $a_4=a_5-d=12-(-8)=20$

9) 정답 ⑤

[출제자 : 황보백 송원학원]

$(\sqrt[n]{8})^4=\left(2^{\frac{3}{n}}\right)^4=2^{\frac{12}{n}}$ 이 자연수가 되게 하는 n의 최댓값은 12이므로 $f(8)=12$

$(\sqrt[n]{9})^4=\left(3^{\frac{2}{n}}\right)^4=3^{\frac{8}{n}}$ 이 자연수가 되게 하는 n의 최댓값은 8이므로 $f(9)=8$

$(\sqrt[n]{81})^4=\left(3^{\frac{4}{n}}\right)^4=3^{\frac{16}{n}}$ 이 자연수가 되게 하는 n의 최댓값은 16이므로 $f(81)=16$

따라서

$f(8)+f(9)+f(81)=12+8+16=36$

10) 정답 ②

[출제자 : 황보백 송원학원]

$\cos^2x=1-\sin^2x$이므로

$6(1-\sin^2x)-\sin x-5=0$

$-6\sin^2x-\sin x+1=0$

$6\sin^2x+\sin x-1=0$

$(2\sin x+1)(3\sin x-1)=0$

$\sin x=-\frac{1}{2}$ 또는 $\sin x=\frac{1}{3}$

$\sin x=-\frac{1}{2}$의 해의 합은 3π이고

$\sin x=\frac{1}{3}$의 해의 합은 π이다.

따라서 모든 해의 합은 4π이다.

11) 정답 ③

[출제자 : 황보백 송원학원]

[그림 : 최성훈T]

$f(-2)=a^0+1=2$

에서 $\mathrm{A}(-2,\,2)$이다.

$y=10$과 $y=f(x)$의 교점의 x좌표는

$a^{2x+4}+1=10$

$a^{2x+4}=9$

$a^{x+2}=3$

$x+2=\log_a 3$
따라서 $x=\log_a 3-2$
그러므로 $\mathrm{B}(\log_a 3-2,\ 10)$
$y=10$과 $y=g(x)$의 교점의 x좌표는
$a^{1-x}-2=10$
$a^{1-x}=12$
$1-x=\log_a 12$
따라서 $x=1-\log_a 12$
그러므로 $\mathrm{C}(1-\log_a 12,\ 10)$
삼각형 ABC에서
$\overline{\mathrm{BC}}=(\log_a 3-2)-(1-\log_a 12)$
$=\log_a 36-3$
이고 꼭짓점 A에서 $\overline{\mathrm{BC}}$에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\overline{\mathrm{AH}}=8$이므로
삼각형 ABC의 넓이는
$\frac{1}{2}\times 8\times(\log_a 36-3)=20$
$\log_a 36-3=5$
$\log_a 36=8$
$\therefore\ a^8=36$
$a^4=6$이다.

12) 정답 ①
[출제자 : 황보백 송원학원]

$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x^4-4x^2+1}=1$에서
다항함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이다.
함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해서는
$g(x)$는 $(x-1)^2$과 $x-2$로 나누어떨어져야 한다. [랑데뷰팁 참고]
따라서
$g(x)=(x-1)^2(x-2)(x+k)$꼴이다. (단, k는 상수이다.)
$\lim_{x\to 2}\frac{g(x)}{x-2}=1$이므로
$\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)^2(x-2)(x+k)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x-1)^2(x+k)$
$=1\times(2+k)=1$
에서 $k=-1$이다.
따라서 $g(x)=(x-1)^3(x-2)$
그러므로 $g(0)=(-1)\times(-2)=2$

[랑데뷰팁]-[세미나(71) 참고]
함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로
$f(x)g(x)$는 $x=1$과 $x=2$에서 연속이어야 한다.
$f(x)g(x)$가 $x=1$에서 연속이기 위해서는
$\lim_{x\to 1}f(x)g(x)=f(1)g(1)$
$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)}{x-1}=2g(1)$
이 성립하기 위해서는 $x\to 1$일 때, 분모$\to 0$이므로 분자$\to 0$이다.
따라서 $\lim_{x\to 1}g(x)=0$이다, 함수 $g(x)$는 모든 실수에서 연속인 다항함수이므로 $\lim_{x\to 1}g(x)=g(1)$이 성립한다. 즉, $g(1)=0$이다.
따라서 $\lim_{x\to 1}\frac{g(x)}{x-1}=0$에서 $g'(1)=0$이다.
그러므로 $g(x)$는 $(x-1)^2$으로 나누어 떨어진다.

13) 정답 ②
[출제자 : 황보백 송원학원]

$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$이므로 (*)로부터
$a_{n+1}=2a_n+2^n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$
$a_{n+1}+\frac{2^n}{n+1}=2\left(a_n+\boxed{\frac{2^{n-1}}{n}}\right)$ $(n\geq 1)$
이 성립한다. $b_n=a_n+\frac{2^{n-1}}{n}$이라 하면 $b_{n+1}=2b_n$
수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $b_1=a_1+\frac{2^0}{1}=2$이고
공비가 2인 등비수열이므로 $b_n=\boxed{2^n}$이다.
$\therefore\ a_n=b_n-\frac{2^{n-1}}{n}=2^n-\frac{2^{n-1}}{n}=\boxed{2^{n-1}\left(2-\frac{1}{n}\right)}$
$a_8=2^7\left(2-\frac{1}{8}\right)=256-16=250$
따라서 $f(n)=\frac{2^{n-1}}{n}$, $g(n)=2^n$
$h(n)=2^{n-1}\left(2-\frac{1}{n}\right)$이다.
$f(4)+g(4)+h(4)=\frac{2^3}{4}+2^4+2^3\left(2-\frac{1}{4}\right)$
$=2+16+14=32$

14) 정답 ④
[출제자 : 황보백 송원학원]

ㄱ. $v(t)=-4t^3+16t=-4t(t^2-4)$
$=-4t(t+2)(t-2)$
$v(t)=0$을 만족하는 $t=2$ $(t>0)$이다.
따라서 점 P가 출발한 후 움직이는 방향이 바뀔 때의 시간은 $t=2$이고 점 P가 원점을 출발하여 움직이기 때문에 $t=2$일 때의 위치는
$\int_0^2(-4t^3+16t)dt$
$=\left[-t^4+8t^2\right]_0^2=-16+32=16$ (참)

ㄴ. $a(t)=-12t^2+16=-92$에서
$t^2=9$

$t=3$ $(t>0)$
따라서 가속도가 -92인 시간은 $t=3$이며 움직인 거리는

$\int_0^3 |v(t)|dt$

$=\int_0^2 v(t)dt+\int_2^3 \{-v(t)\}dt$

$=16-\left[-t^4+8t^2\right]_2^3$

$=16-(-65+8\times 5)$

$=16+25=41$

그러므로 점 P가 시각 $t=0$일 때 부터 가속도가 -92가 될 때까지 움직인 거리는 41이다. (거짓)

ㄷ. 점 P가 움직이기 시작한 후 다시 위치가 0인 시간을 $t=a$ $(a>0)$라 하면

$\int_0^a v(t)dt=0$이 성립한다.

따라서

$\int_0^a (-4t^3+16t)dt$

$=\left[-t^4+8t^2\right]_0^a$

$=-a^4+8a^2$

$=-a^2(a^2-8)=0$

에서

$a=2\sqrt{2}$이다.

$t=2\sqrt{2}$일 때, 가속도는 $a(2\sqrt{2})=-96+16=-80$이므로
가속도의 크기는 $|-80|=80$이다.

15) 정답 ⑤
[출제자 : 황보백 송원학원]
[그림 : 이정배T]

$xg(x)=\int_0^x tf(t)dt+f(x)$의 양변에 $x=0$을 대입하면 $f(0)=0$

$xg(x)=\int_0^x tf(t)dt+f(x)$의 양변을 미분하면

$g(x)+xg'(x)=xf(x)+f'(x)\cdots$㉠

$x=0$을 대입하면 $g(0)=f'(0)$

$g(0)=0$이므로 $f'(0)=0$

따라서 $f(x)=x^2(x+a)=x^3+ax^2$꼴이다.

$k(x)=xg(x)$라 하면

㉠에서 $k'(x)=g(x)+xg'(x)=x^4+ax^3+3x^2+2ax$이고

(나)에서 함수 $k'(x)$가 y축 대칭이므로

$k'(-x)=k'(x)$에서 $a=0$이다.

따라서 $f(x)=x^3$

㉠에서 $g(x)+xg'(x)=x^4+3x^2$

$xg(x)=\frac{1}{5}x^5+x^3+C$

$x=0$을 대입하면 $C=0$이다.

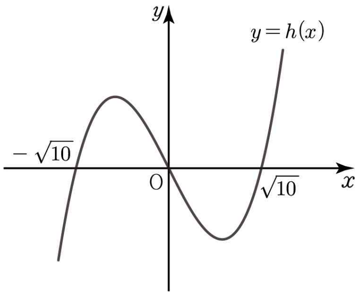
따라서 $g(x)=\frac{1}{5}x^4+x^2$

그러므로 $g'(x)=\frac{4}{5}x^3+2x$

$k(x)=f(x)-g'(x)=x^3-\left(\frac{4}{5}x^3+2x\right)$

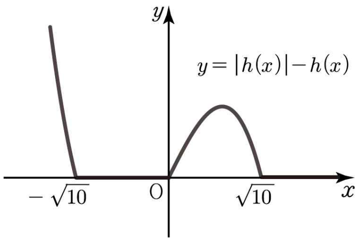
$=\frac{1}{5}x^3-2x$

함수 $h(x)$의 그래프 개형은 다음과 같다.



$|h(x)|-h(x)=\begin{cases}0 & (h(x)\geq 0)\\ -2h(x) & (h(x)<0)\end{cases}$

이고 함수 $|h(x)|-h(x)$의 그래프 개형은 다음과 같다.



따라서

$\int_0^{10}\{|h(x)|-h(x)\}dx$

$=2\int_0^{\sqrt{10}}\left\{-\frac{1}{5}x^3+2x\right\}dx$

$=2\left[-\frac{1}{20}x^4+x^2\right]_0^{\sqrt{10}}$

$=2(-5+10)=10$

16) 정답 10
[출제자 : 황보백 송원학원]

(분모)→0 일 때, (분자)→0 이어야만 극한값이 존재한다.

따라서 $a=5$이고 $\lim_{x\to 1}\frac{5x-5}{x-1}=5$로부터 $b=5$이다.

$\therefore 5+5=10$

17) 정답 11
[출제자 : 황보백 송원학원]

$f(x)=\int(x^3+2x)dx=\frac{1}{4}x^4+x^2+C$

$f(0)=3$에서 $C=3$이므로

$f(x)=\frac{1}{4}x^4+x^2+3$이다.

$f(2)=4+4+3=11$

18) 정답 1

[출제자 : 황보백 송원학원]

$f'(x)=3x^2$에서 $f'(a)=3a^2$

$[a,\ 2]$에서의 평균변화율은

$\frac{a^3-8}{a-2}=\frac{(a-2)(a^2+2a+4)}{a-2}=a^2+2a+4$

$3a^2=a^2+2a+4,\ 2a^2-2a-4=0$

$a^2-a-2=0$

$(a+1)(a-2)=0$

$\therefore\ a=-1$ 또는 $a=2$

따라서 $a<2$이므로 $a=-1$이다.

그러므로 $a^2=1$이다.

19) 정답 9

[출제자 : 황보백 송원학원 010-5673-8601]

조건 (가)에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로

$\lim_{x\to1}\{f(x)-2\}=f(1)-2=0$

즉, $f(1)=2$

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x^2-x}=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\frac{1}{x}\right\}$

$=f'(1)\times1=3$

즉, $f'(1)=3$

조건 (나)에서 $h\to0$일 때 (분자)$\to0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로

$\lim_{h\to0}\{g(1+h)-1\}=g(1)-1=0$

즉, $g(1)=1$

$\lim_{h\to0}\frac{h}{g(1+h)-1}=\lim_{h\to0}\frac{1}{\frac{g(1+h)-g(1)}{h}}$

$=\frac{1}{\lim_{h\to0}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}}$

$=\frac{1}{g'(1)}=\frac{1}{3}$

즉, $g'(1)=3$

$h(x)=f(x)g(x)$에서

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로

$h'(1)=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)$

$=3\times1+2\times3=9$

20) 정답 473

[출제자 : 황보백 송원학원]

[그림 : 최성훈T]

$\angle\mathrm{ABC}=\theta$라 하면 $\sin\theta=\frac{4}{5}$이므로 $\cos\theta=\frac{3}{5}$이다.

선분 AB가 지름이므로 $\angle\mathrm{ACB}=\frac{\pi}{2}$이다.

$\overline{\mathrm{BC}}=6$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=10$이다.

따라서 직각삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{AC}}=8$이다.

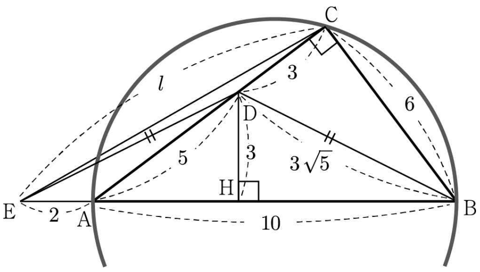
선분 AC를 5 : 3으로 내분하는 점이 D이므로 $\overline{\mathrm{AD}}=5$, $\overline{\mathrm{CD}}=3$

직각삼각형 CDB에서 $\overline{\mathrm{DB}}=\sqrt{3^2+6^2}=3\sqrt{5}$

따라서 $\overline{\mathrm{DE}}=3\sqrt{5}$이다.

점 D에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 두면

$\sin(\angle\mathrm{DAH})=\frac{3}{5}$, $\overline{\mathrm{AD}}=5$이므로 $\overline{\mathrm{DH}}=3$이다.



직각삼각형 DEH에서 $\overline{\mathrm{DE}}=3\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{DH}}=3$이므로

$\overline{\mathrm{EH}}=\sqrt{(3\sqrt{5})^2-(3^2)}=6$

따라서 $\overline{\mathrm{BH}}=6$

삼각형 BCE에서 $\overline{\mathrm{BE}}=12$, $\overline{\mathrm{BC}}=6$, $\cos(\angle\mathrm{CBE})=\cos\theta=\frac{3}{5}$이므로

코사인법칙을 적용하면

$l^2=12^2+6^2-2\times12\times6\times\frac{3}{5}$

$=180-\frac{432}{5}=\frac{900-432}{5}=\frac{468}{5}$

$p=5,\ q=468$

$p+q=473$

21) 정답 76

[출제자 : 황보백 송원학원]

$a_n=dn-d+a_1$이라 두면

$a_{21}=20d+a_1$

따라서 $21d\le a_{21}\le22d$ …㉠

$152\le a_{21}\le162$ …㉡

㉠, ㉡에서

$21d\le162,\ 152\le22d$가 성립한다.

따라서 $\frac{152}{22}\le d\le\frac{162}{21}$

$6.XXX\le d\le7.XXX$

에서 $\therefore\ d=7$

$d=7$이면 $7\le a_1\le14$이고 $a_{21}=140+a_1$에서

$147 \le a_{21} \le 154$로 가능한 a_1은 12, 13, 14…ⓒ
$d \ge 8$이면 $a_{21} > 160$이므로 모순
ⓒ에서
$a_n = 7n+5$, $a_n = 7n+6$, $a_n = 7n+7$

(i) $a_n = 7n+5$일 때,
$a_2 = 19$, $a_k = 7k+5$, $a_{5k-3} = 35k-16$
$(7k+5)^2 = 19(35k-16)$
$49k^2+70k+25 = 665k-304$
$49k^2-595k+329 = 0$
$7k^2-85k+47 = 0$
만족하는 자연수 k가 존재하지 않는다. (모순)

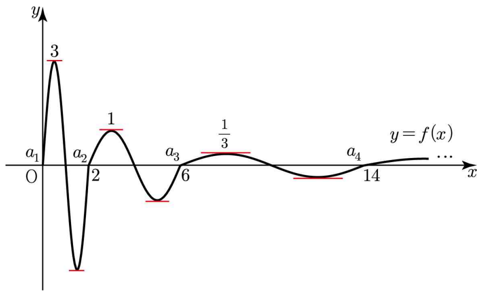
(ii) $a_n = 7n+6$일 때,
$a_2 = 20$, $a_k = 7k+6$, $a_{5k-3} = 35k-15$
$(7k+6)^2 = 20(35k-15)$
$49k^2+84k+36 = 700k-300$
$49k^2-616k+336 = 0$
$7k^2-88k+48 = 0$
$(7k-4)(k-12) = 0$
$\therefore\ k = 12$

(iii) $a_n = 7n+7$일 때,
$a_2 = 21$, $a_k = 7k+7$, $a_{5k-3} = 35k-14$
$(7k+7)^2 = 21(35k-14)$
$49(k+1)^2 = 49 \times 3(5k-2)$
$k^2+2k+1 = 15k-6$
$k^2-13k+7 = 0$
만족하는 자연수 k가 존재하지 않는다. (모순)

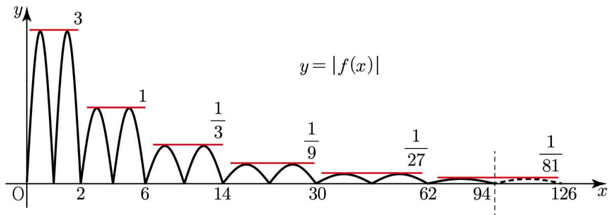
(i)~(iii)에서
$a_n = 7n+6$이다.
$a_{10} = 76$

22) 정답 159
[출제자 : 황보백 송원학원]
[그림 : 최성훈T]

$f(x) = \dfrac{1}{3^{n-2}}\sin\left(\dfrac{\pi(x-a_n)}{2^{n-1}}\right)$ $(a_n \le x < a_{n+1})$에서
$f(x)$는 주기가 $\dfrac{2^{n-1}\times 2\pi}{\pi} = 2^n$인 함수다.
(i) $n=1 \to 0 \le x \le 2$, $f(x) = 3\sin(\pi x)$
(ii) $n=2 \to 2 \le x \le 6$, $f(x) = \sin\left(\dfrac{\pi(x-2)}{2}\right)$
(iii) $n=3 \to 6 \le x \le 14$, $f(x) = \dfrac{1}{3}\sin\left(\dfrac{\pi(x-6)}{2^2}\right)$
… … …
따라서 $y = f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



따라서 $y = |f(x)|$의 그래프는 다음과 같다.



$k=1$일 때, $y=3$과 $y=|f(x)|$의 그래프의 교점의 개수는 2
$\therefore\ a_1 = 2$
$k=2$일 때, $y=1$과 $y=|f(x)|$의 그래프의 교점의 개수는 $4+2$
$\therefore\ a_2 = 6$
$k=3$일 때, $y=\dfrac{1}{3}$과 $y=|f(x)|$의 그래프의 교점의 개수는 $8+2$
$\therefore\ a_3 = 10$
$k=4$일 때, $y=\dfrac{1}{9}$과 $y=|f(x)|$의 그래프의 교점의 개수는 $12+2$
$\therefore\ a_4 = 14$
$k=5$일 때, $y=\dfrac{1}{27}$과 $y=|f(x)|$의 그래프의 교점의 개수는 $16+2$
$\therefore\ a_5 = 18$
$k=6$일 때, $y=\dfrac{1}{81}$과 $y=|f(x)|$의 그래프의 교점의 개수는 21
$7 \le k \le 10$일 때, $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{k-2}$과 $y=|f(x)|$의 그래프의 교점의 개수는 22
$\therefore\ a_7 = a_8 = a_9 = a_{10} = 22$
$$\sum_{k=1}^{10} a_k = 2+6+10+14+18+21+22\times 4$$
$$= 71+88 = 159$$