Chapter 4. 일과 에너지 그리고 역학적 에너지 보존

개요

역학의 마지막 주제인 일, 에너지 단원이다. 이 단원은 어렵기로 악명이 높은데 사실 개념이 그렇게 어려운 것은 아니다. 하지만 난이도가 높은 융합형 문항들이 역학 전체를 포괄하고 있음에도 불구하고 일, 에너지 단원으로 분류되기 때문에 이 단원이 어렵다는 말이 나오는 것이다. Chapter 4는 결코 어려운 내용을 담고 있지 않기 때문에 공부하기 전에 겁을 먹지 말자.

일, 에너지 단원에서는 두 가지 부류의 문항이 출제된다.

먼저 일과 에너지의 관계를 묻거나 에너지 보존을 묻는 부류의 문항이 출제된다. 이 문항들은 대부분 2페이지, 3페이지에 실리는 난이도 중 정도의 문항들이다. 대부분은 Chapter 4의 내용으로 그리 어렵지 않게 풀 수 있다. (앞 단원들과의 융합이 아예 없지는 않으나 Chapter 1, 2의 내용이 가볍게 들어가는 정도이며 Chapter 4가 단독 주인공으로 등장하는 문항들이다.)

나머지 한 부류는 융합형 문항이다. 융합형 문제로 출제되는 대부분의 문항들은 난이도가 높다. 융합형 문항이란, Chapter 1에서의 ‘등가속도 운동’, Chapter 2에서의 ‘뉴턴 운동 법칙’, Chapter 3에서의 ‘운동량과 충격량의 관계’, Chaper 4에서의 ‘일-운동에너지 정리’와 ‘역학적 에너지 보존’을 합하여 출제하는 문항들을 말한다. 이 문항들이 보통 4페이지를 구성하게 되며, 상위권을 변별하게 된다. 이 문항들은 I단원(Chaper 1~5)의 전체적인 학습이 잘 되어 있는지를 묻는다. 풀이를 이해하는 것은 그리 어렵지 않으나, 그 풀이를 생각해 내는 것이 어렵다는 것이 학생들이 융합형 문항을 어렵게 느끼도록 하는 요인이다. 이를 극복하려면 상황에 맞는 적절한 물리량의 관계를 찾고 추론할 수 있는 능력이 필요하다. 먼저, 앞선 단원 각각의 교과 내용과 도구, 그리고 태도들을 잘 익히는 것이 1차적으로 해야 할 일이다. 즉, 각 단원들(Chapter 1~4)의 학습을 먼저 완벽하게 하는 것이 융합형 고난도 문항을 풀기 위한 첫 단계라 할 수 있다.

우리 교재에서는 Chapter 4에서 일, 에너지와 고난도 융합 문제를 모두 다루지 않고 학습의 단계를 효율적으로 나누기 위해서 아래와 같이 Chapter 4와 Chapter 5를 나누었다.

Chapter 4에서는 교과서보다 더 깊은 이해를 위해 기존 교재들의 서술 순서를 채택하지 않고 서술의 방식을 다시 재구성하였다. 그리고 이 챕터의 주인공이라고 할 수 있는 두 물리량인 일과 에너지 사이의 유기성을 훨씬 잘 받아들일 수 있도록 그 어떤 교재보다 상세히 서술하였다. 이 챕터에서는 일과 에너지의 정의와 관계, 그리고 역학적 에너지 보존의 실전적 도구를 익히고, 전반적인 일, 에너지 문항을 만났을 때 꼭 필요한 태도를 익히는 연습을 하게 될 것이다.

이어 Chapter 5에서는 고난도 융합형 문항들을 통해 상황에 따른 적절한 도구를 선택하는 방법과 일관적이고 실전적인 태도를 익히게 될 것이다.

❑ 일

일의 정의

힘을 가하여 물체에 에너지를 전달하는 것을 '**물체에 일을 한다.**'라고 정의한다.
정확하게 정의하면, **일(W)이란 물체에 전달/전환된 에너지**이다.

비보존력이 한 일은 **전달된 에너지**라고 하는 것이, **보존력이 한 일**은 **전환된 에너지**라고 하는 것이 말로 할 때 자연스럽다. 즉, 일은 **에너지가 얼마나 전달/전환되었는가**를 의미한다.

$$W = \Delta E$$

양의 일이란, 에너지가 **외부에서 물체로** 전달되는 것이고,
음의 일이란, 에너지가 **물체에서 외부로** 전달되는 것이다.

일을 구하는 방법

일(W)은 **변위(d)와 힘(F)을 곱한 값**으로 구한다.

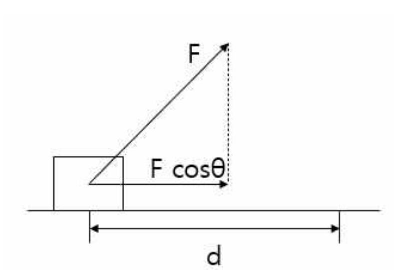
$$W = \vec{F} \cdot \vec{d}$$

이때, 변위(d)와 힘(F)는 모두 벡터량이다. 벡터의 두 가지 곱하기 연산 중 위 곱은 스칼라곱(내적)으로, 결과가 스칼라량인 연산이다. 따라서 **일(W)은 스칼라량**이다.

양의 일, 음의 일에서의 부호를 공간적 방향이라고 생각하면 곤란하다. **양의 일 / 음의 일은 물체의 에너지가 늘어났냐 / 줄어들었냐**를 의미하는 것이기 때문이다.

위 식을 벡터끼리의 계산이 아닌 스칼라량들의 계산으로 표현하면 아래와 같다.

$$W = |\vec{F}||\vec{d}|\cos\theta$$



여기서 θ는 두 벡터 $\vec{F}$와 $\vec{d}$가 이루는 각의 크기이다. 이 식의 우변을 $|\vec{F}|\cos\theta$와 $|\vec{d}|$의 곱으로 보자.

$|\vec{d}|$는 변위의 크기인즉, **이동 거리**와 같다.
벡터 $\vec{F}$를 변위 벡터$\vec{d}$의 방향과 나란한 방향과 변위 벡터$\vec{d}$와 수직인 방향으로 분해하여 얻은 두 벡터

의 성분 중 **변위 벡터** $\vec{d}$**와 나란한 방향인** $\vec{F}$**의 성분의 크기**가 $|\vec{F}|\cos\theta$가 된다.

물론 물리학I 수준에서는 $\vec{F}$와 $\vec{d}$는 평행한 경우가 대부분이므로 $\cos\theta$값이 1 또는 -1이 되기 때문에 다음과 같이 일을 $\pm$**(두 벡터의 크기 곱)**으로 생각하여도 문제없다.

$W = |\vec{F}||\vec{d}|$: 양의 일 (**힘과 변위의 방향이 동일**한 경우)
$W = -|\vec{F}||\vec{d}|$: 음의 일 (**힘과 변위의 방향이 반대**인 경우)

❑ 일과 에너지의 관계

다른 책들과 설명 순서와 설명 방식이 꽤 다를 것이다. 수능 물리학1의 일과 에너지 단원에 대한 더욱 깊은 이해를 위해서 이처럼 아예 구성을 처음부터 뒤엎은 것이니 잘 받아들일 준비가 되었다면 시작해 보자.

운동에너지

물체의 운동상태와 관련된 에너지이다. 질량 m인 물체가 속력 v로 운동할 때, 운동에너지 E_k를 다음과 같이 정의한다.

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 \text{ [단위 : J(줄)]}$$

운동에너지의 단위는 일과 마찬가지로 줄(J)이라고 하며, $1\mathrm{J} = 1\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2 = 1\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}$이다.

$p = mv$임을 이용하여 운동량을 이용하여 운동에너지를 표현하면 아래와 같다.

$$E_k = \frac{p^2}{2m}$$

단, 운동에너지 변화량의 경우에는 $\Delta E_k \neq \frac{(\Delta p)^2}{2m}$임에 주의하자.

$\Delta E_k = \frac{\Delta (p^2)}{2m}$이 맞는 식이기 때문이다.

문항에서 Δp가 주어졌다고 해서 Δp를 별 생각 없이 p대신 넣는 실수를 범하지 말자.

알짜힘이 한 일 (일-운동에너지 정리)

앞서 운동에너지를 정의하였다. 이제 **일과 운동에너지 사이의 관계**를 알아보자.

수평면 위에서 질량이 m인 물체에 F의 힘을 가하여 가속도 a로 가속시키는 상황이 있다. (알짜힘이 F가 된다.)
이 상황을 수식으로 표현하면 Newton의 제 2법칙에 의해 $F = ma$가 된다.
힘 F가 거리 s만큼 작용하는 동안 한 일을 W라 하면 일의 정의에 의해 $W = Fs$이다.
처음 속도를 v_0, 나중 속도를 v라고 하자.

$W = Fs$에서,
F 대신 $ma = m\dfrac{v - v_0}{\Delta t}$을, s 대신 $\dfrac{v + v_0}{2}\Delta t$을 대입하면, 아래와 같다.

$$W = m\left(\frac{v - v_0}{\Delta t}\right)\left(\frac{v + v_0}{2}\Delta t\right)$$
$$= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$
$$= \Delta E_k$$

$$\therefore W = \Delta E_k$$

앞에서 이끌어낸 식은 '**일-운동에너지 정리**'이다.
'**일-운동에너지 정리**'는 "**알짜힘이 한 일은 운동에너지 변화량과 같다**"라는 정리이다.
결국 알짜힘을 통해 물체에 전달된 에너지는 물체의 운동에너지 변화량과 같다는 것이다.

"알짜힘이 한 일은 운동에너지 변화량과 같다"를 자주 반복하여 말이 익숙해질 수 있도록 하자.

우리는 **알짜힘이 한 일을 운동에너지 변화량으로** 읽을 수 있어야 하며,
거꾸로 **운동에너지 변화량을 알짜힘이 한 일로** 읽을 수도 있어야 한다.

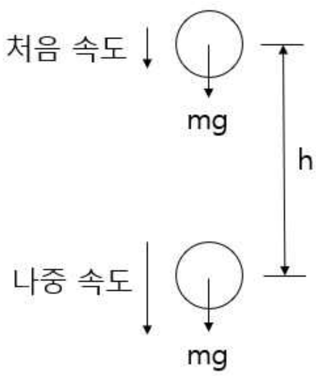
대부분의 경우에는 좌변의 '알짜힘이 한 일'은 '알짜힘의 크기×이동거리'(양/음의 일 고려도 해서 부호도 붙여 주어야 한다.)가 되며, 그 값이 **운동에너지 변화량**과 같음을 이용하여 풀이를 하게 된다.
반대로 운동 에너지 변화량을 알고 있는 경우, 알짜힘의 크기 또는 알짜힘이 작용한 거리를 구하는 것도 많이 나오는 패턴이다.

중력이 한 일

앞서 **알짜힘이 한 일**에 대해 살펴보았다. 이번엔 **중력이 한 일**에 대해 알아보도록 하자.

연직 방향(중력이 작용하는 방향과 나란한 방향)으로 운동하는 질량이 m인 물체에 대해 생각해 보자. (공기 저항이 작용하지 않는다고 하자)

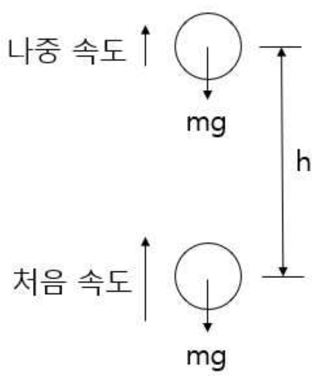
이 물체에는 중력이 작용하고 있다. 중력은 연직 아래 방향으로 크기 mg로 작용하고 있다. 중력이 물체에 거리 h만큼 작용하는 동안을 살펴보도록 하자.



먼저, 위 그림처럼 **물체가 아래로 내려가고 있는 상황**을 생각해 보자. 중력 mg는 연직 아래 방향으로 작용하므로 물체의 이동 방향과 중력의 방향이 같기 때문에 **중력은 양의 일을 하였다.**

이 때 물체가 거리 h만큼 중력 mg를 받았기 때문에 중력이 한 일은 mgh이다.

운동 방향으로 힘을 받았으므로 물체의 속력은 빨라질 것이다. 즉, **물체는 운동에너지를 얻게 된 것**이고, 여기서 운동에너지의 변화량은 **다른 어떤 것으로부터 운동에너지로 전환된 에너지**인즉 **중력이 한 일**인 mgh와 같다. 즉, mgh만큼 운동에너지가 증가한 것이다.



반대로, 위 그림처럼 **물체가 위로 올라가고 있는 상황**을 생각해 보자. 중력 mg는 연직 아래 방향으로 작용하므로 물체의 이동 방향과 중력의 방향이 반대이기 때문에 **중력은 음의 일을 하였다.**

이 때 물체가 거리 h만큼 중력 mg를 받았기 때문에 중력이 한 일은 $-mgh$이다.

운동 반대방향으로 힘을 받았으므로 물체의 속력은 느려질 것이다. 즉, **물체는 운동에너지를 잃게 된 것**이고, 여기서 운동에너지의 변화량은 **운동에너지로부터 운동에너지가 아닌 다른 어떤 것으로 전환된 에너지**인즉 **중력이 한 일**인 $-mgh$와 같다. 즉, mgh만큼 운동에너지가 감소한 것이다.

중력 퍼텐셜에너지 (E_p)

중력에 의하여 물체에 저장되는 에너지를 말한다.

예를 들어 손에서 공을 떨어뜨려 낙하시킬 때, 중력을 받음에 따라 **어떤 에너지**에서 운동에너지로 에너지의 전환이 일어난다. 이 때 **'어떤 에너지'**를 **퍼텐셜에너지**로 정의한다.

그 중에서도 **중력에 의해 다른 에너지로의 전환이 일어나게 될 힘**이므로, **중력에 의한 퍼텐셜 에너지**라고 한다. 이를 줄여서 **중력 퍼텐셜 에너지**라 한다.

앞서 물체가 올라가는 상황과 내려가는 상황을 비교했을 때, '운동에너지가 아닌 다른 어떤 것'이라 하였다. 그 **다른 어떤 것**이 바로 중력 퍼텐셜 에너지이다.

중력이 한 일과 중력 퍼텐셜 에너지의 관계

중력 퍼텐셜 에너지와 중력이 한 일의 관계를 살펴보자. 앞서 중력이 한 일이란 것은 중력 퍼텐셜 에너지와 운동 에너지 사이 전환되는 에너지를 뜻한다고 했었다.

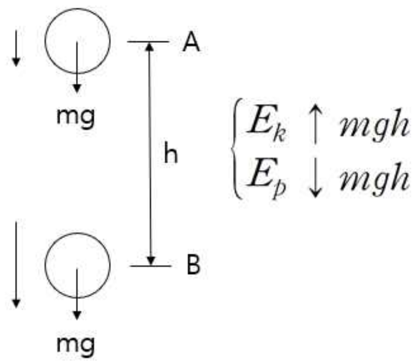
물체가 아래로 내려가고 있는 상황에서는 중력에 의해 물체의 **중력 퍼텐셜 에너지**가 **운동 에너지**로 전환되었다고 할 수 있다. 이 때, **중력이 한 일**은 **양의 값**을 갖는다.

반대로, **물체가 위로 올라가고 있는 상황**에서는 중력에 의해 물체의 **운동 에너지**가 **중력 퍼텐셜 에너지**로 전환되었다고 할 수 있다. 이 때, **중력이 한 일**은 **음의 값**을 갖는다.

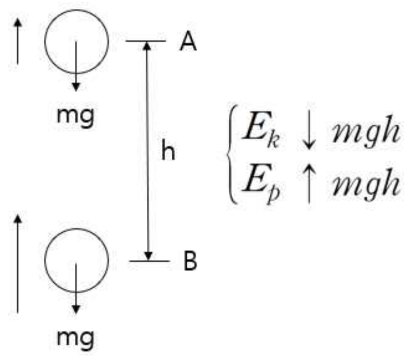
중력이 한 일은 아래 항상 표와 같이 **중력 퍼텐셜 에너지**가 **운동에너지**로 전환될 때가 양의 값을 가지며, 이 방향을 기준으로 생각해 주자.

$W_{중력} > 0$	중력 퍼텐셜 에너지 → 운동 에너지
$W_{중력} < 0$	운동 에너지 → 중력 퍼텐셜 에너지

높이 변화량 Δh에 따른 두 에너지 변화량에 주목하여 다음을 살펴보자. 뒤이어 나올 기준선 개념은 생각하지 말자.



만약 물체가 자유낙하하여 A지점에서 출발하여 아래로 h만큼 떨어진 B지점까지 물체가 내려갔다고 해보자. 이 때, 중력 퍼텐셜 에너지는 mgh만큼 줄어든다. 그만큼 운동 에너지가 mgh만큼 늘어나게 된다. 이 때 변환된 에너지인즉, 중력이 한 일은 mgh이다.



반대로 물체를 위로 쏘아 올려 B지점에서 출발하여 위로 h만큼 떨어진 A지점까지 물체가 올라갔다고 해보자. 이 때, 중력 퍼텐셜 에너지는 mgh만큼 늘어난다. 그만큼 운동 에너지가 mgh만큼 줄어들게 된다. 이 때 변환된 에너지인즉, 중력이 한 일은 $-mgh$이다.

따라서 높이 변화량 Δh에 따른 **중력 퍼텐셜 에너지 변화량**은 아래와 같다.

$$\Delta E_p = mg\Delta h$$

중력 퍼텐셜 에너지는 기준이 되는 한 지점과 다른 한 지점 사이의 상대적인 값이기 때문에 본래 **변화량(차이)만이 물리적인 의미를 가진다.** 하지만 만약 기준선을 정하게 되면 상대적 비교가 가능해진다. 기준선으로부터의 **높이의 차이**를 구할 수 있기 때문이다.

기준선을 설정하는 행위는 어떤 지점 p가 기준선으로부터 **얼마나 높이 떨어져 있는지**를 체크하겠다는 것이므로 **'차이를 구하겠다'**는 의지를 가지는 행위이다.
기준선을 설정하게 되면, 다른 어떤 지점에서의 중력 퍼텐셜 에너지의 값이 정해지며, 이는 기준선으로부터의 높이 차이 h에 비례하게 되고, 기준선보다 물체가 위쪽 방향에 있을 때 양수 값을 가진다. 따라서 물체의 중력 퍼텐셜 에너지는 다음과 같다.

$$E_p = mgh$$

(h는 기준선으로부터의 높이)

기출 문제들의 발문을 분석해보면, 중력 퍼텐셜 에너지의 **기준선을 설정해주지 않는 이상**, 문제에서 **퍼텐셜 에너지 '변화량' 조건은 나올 수 있으나, 퍼텐셜 에너지 '값' 조건을 주지는 않는다**는 것을 알 수 있다. 물론, '**단, 수평면에서의 중력에 의한 퍼텐셜 에너지를 0으로 한다.**'와 같은 조건이 나오면 문제에서 **기준선을 설정한 것**이므로 중력 퍼텐셜에너지 값을 구하는 게 가능하다.

만약 문제에서 기준선을 정하지 않았는데, 퍼텐셜 에너지 값을 구해야 할 필요가 있는 경우, **기준선은 대체 어디에 설정해야 하는 것일까?**

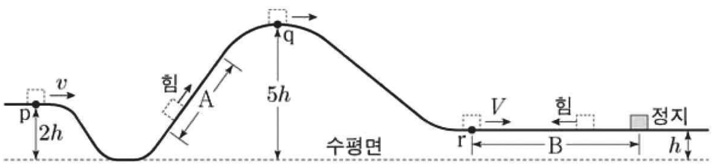
기준선은 기준을 잡는 사람 마음대로 **어디에 설정해도 문제없다**. 꼭 수평면, 바닥면을 기준으로 해야 한다는 보장은 없다는 것이다.
그러나, 아무 곳에나 기준선을 잡는다고 해서 문제가 모두 쉽게 풀릴 리가 없다.

따라서, 기준선에 대해 문제에서 설정을 해 주지 않는다면, **어느 지점을 중력 퍼텐셜에너지의 기준선으로 잡아야 유리한지를 생각하는 것**이 중요한 포인트가 된다.

다음 문항을 보고 어떤 곳을 기준선으로 잡을 것인지 생각해보자.

2020학년도 수능 17번

그림과 같이 레일을 따라 운동하는 물체가 점 p, q, r를 지난다. 물체는 빗면 구간 A를 지나는 동안 역학적 에너지가 $2E$만큼 증가하고, 높이가 h인 수평 구간 B에서 역학적 에너지가 $3E$만큼 감소하여 정지한다. 물체의 속력은 p에서 v, B의 시작점 r에서 V이고, 물체의 운동 에너지는 q에서가 p에서의 2배이다.



V는? (단, 물체의 크기, 마찰과 공기 저항은 무시한다.)

해설

문항을 살펴보니 ‘각 지점에서의 에너지(E_k, E_p) 값 비교’ 문항이다.
우리가 지금 에너지 값을 비교해야 하는 지점은 크게 세 지점 p, q, r이다. (세 지점에서의 운동 에너지, 중력 퍼텐셜 에너지를 구해야 한다.)

중력에 의한 퍼텐셜 에너지는 원래 변화량(차이)만이 물리적 의미를 가진다고 하였다.
중력 퍼텐셜 에너지 그 자체가 의미를 가지기 위해서는 차이의 의미를 줄 수 있는 기준선이 필요한데, 이 기준선은 우리 마음대로 잡아도 된다. 자 그럼 기준선을 어디에 잡아야 할 것인가?

p지점과 q지점을 기준선으로 잡으면, 퍼텐셜 에너지가 음수가 되는 지점들이 생기므로 익숙하지가 않다. 생각해 봐도 여기에 기준선을 잡는 건 아닌 거 같다.
기준선을 수평면으로 잡을 것인가? / r 지점을 기준선으로 잡을 것인가? 에 대해 생각해 보자.

수평면을 기준으로 잡는 것보다는 r지점을 퍼텐셜 에너지가 0인 기준선으로 잡는 게 더 계산상 편리하다는 것을 느낄 수 있으면 좋겠다. r지점의 퍼텐셜 에너지가 계산에 포함되지 않기 때문에 r에서의 역학적 에너지를 그대로 r지점에서의 운동 에너지로 쓸 수 있기 때문이다.
따라서 수평면에서 높이 h인 지점을 퍼텐셜 에너지가 0인 기준선으로 잡자. (기준 선을 쭉 그림에 그어 주고 $E_p = 0$정도를 간단히 표시해주는게 나중에 실수를 방지하기에 좋다.)
그럼 자동으로 기준선에 따른 p점과 q점의 높이는 각각 h, 4h가 된다. (2h, 5h를 그대로 사용해서는 안된다. 우리는 기준선을 수평면으로 두지 않았다.

에너지 상대값 비교 틀을 그리고 분석을 시작해보자. (상대값 비교 틀이 궁금하다면 뒤에 이어지는 p.##의 ‘에너지 상대값 비교 문항의 태도’를 읽고 오자.)

상대값 비교를 하려고 하는데 문제점이 하나 있다. 이미 문제에서 E라는 값을 쓰고 있다는 것이 그것이다. 이럴 때는 E’ 같은 대체 상대값 상수를 이용해 주면 된다. 물론 E’은 우리가 도입한 상수이므로 나중에 E에 대해 나타내어 정리해 주어야 한다.

마지막 정지 상황에서 초기 상황으로 거슬러 올라가면서 점 p, q, r에서의 역학적 에너지를 구해 보자. 각각 E, 3E, 3E이다.
문제 조건에 의해 p, q에서의 운동 에너지를 각각 E’, 2E’으로 놓으면, 두 지점 p, q에서의 중력 퍼텐셜 에너지는 자동으로 E−E’, 3E−2E’이 된다.
앞서 수평면에서 높이 h인 지점을 퍼텐셜 에너지가 0인 기준선으로 잡자고 했다.
두 점 p와 q의 기준선으로부터의 높이는 각각 h, 4h이므로, 높이비에 따른 중력 퍼텐셜 에너지 비를 나타낸 식 E−E‘ : 3E−2E‘ = 1 : 4를 통해 E’을 구하면,
E’=$\frac{1}{2}$E이다.
이제 상대값 비교 틀의 모든 칸을 E에 대해 나타낸 식으로 채울 수 있다. 문제에서 요구하는 속도V는 p점과 r점의 운동 에너지 비율 1:6을 이용하면, 속도 비는 두 지점에서 1:$\sqrt{6}$이 된다는 것을 이용해서 구하면 된다.
따라서 V=$\sqrt{6}$v이다.

❑ 일 에너지 문항에서의 도구

가속도와 에너지 변화량 비율 사이 관계(1) - 연직 방향

연직 방향(중력의 방향과 나란한 방향) 운동에서, 물체의 가속도 a를 알고 있다면,
운동하는 동안의 **'운동 에너지 변화량과 중력 퍼텐셜 에너지 변화량의 비율 ($\Delta E_k : \Delta E_p$)'**을 알 수 있다.

거꾸로 **'운동 에너지 변화량과 중력 퍼텐셜 에너지 변화량의 비율 ($\Delta E_k : \Delta E_p$)'을 알고 있다면, 가속도 a를 알 수도 있다.**

질량 m인 물체가 연직 방향으로 가속도 a로 s만큼 운동하는 상황에서,

① 운동 에너지 변화량 = 알짜힘이 한 일 : $\Delta E_k = mas$
② 중력 퍼텐셜에너지 변화량 = 보존력(중력)이 한 일 : $\Delta E_p = -mgs$

이므로, ①을 ②로 나누어 주면, 아래 식을 얻게 된다.

$$\frac{\Delta E_k}{\Delta E_p} = -\frac{a}{g}$$

(에너지의 증감은 속도의 크기변화, 상승/하강으로 직접 판단하면 되므로, -는 무시하기로 하자.)

가속도를 g를 이용해서 표시하게 되면, 가속도에서 g앞에 곱해진 수를 $\frac{\Delta E_k}{\Delta E_p}$라고 읽을 수 있다.

예를 들면 연직 아래 방향으로 운동하고, 가속도는 아래 방향으로 $\frac{1}{3}g$인 물체 A는 운동 에너지 증가량이 E, 중력 퍼텐셜 에너지 감소량이 $3E$라고 바로 설정할 수 있다.

즉, 두 에너지의 변화량 비율은 가속도 a에 의해 결정되며, 그 역도 성립한다는 것이다.

❑ 일, 에너지 문항에서의 태도

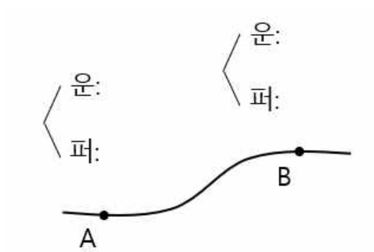
에너지 상대값 풀이 +비율 호환의 문제

에너지 문항의 90% 정도에 이 풀이가 쓰일 정도로 상대값 풀이는 중요하다. **상대값 풀이**라는 것은 **상대적 비례관계**를 이용해 각 **에너지의 크기를 비교**하는 풀이이다.

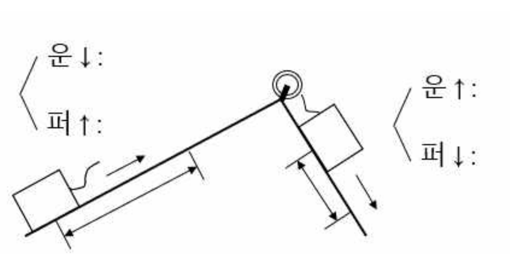
상대값은 실제값 계산과는 차이가 있다. 실제값 계산은 $\frac{1}{2}mv^2$, mgh등의 에너지 값을 실제로 구하는 식들을 이용하여 실제 값을 구하는 풀이이지만, 상대값 풀이는 높이비가 $1:2$인 두 지점의 중력 퍼텐셜 에너지를 각각 $E, 2E$로 두는 것처럼 비례상수 E를 도입하여 비율 관계를 보기 쉽게 나타내는 풀이를 말한다.

에너지 상대값 비교 틀

에너지 상대값 비교 틀을 그리는 것은 에너지 문항을 풀 때 항상 준비되어 있어야 하는 하나의 루틴 같은 것이다. 에너지 상대값 비교 틀은 크게 두 가지가 있다. 첫째 틀은 **지점에서의 상대값 비교 틀**이고, 둘째는 **구간 운동에서의 상대값 비교 틀**이다.



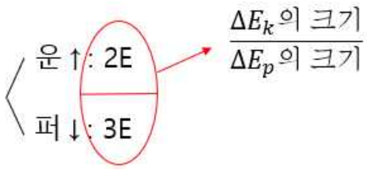
첫째, **지점에서의 상대값 비교 틀**이란, **'값'**을 비교하는 것이다. 더 정확하게는 각 지점에서의 에너지 상대값을 비교하는 틀이다. 위 그림이 바로 지점에서의 상대값 비교 틀이다.



둘째, **구간 운동에서의 상대값 비교 틀**이란, 값이 아닌 **'변화량'**을 비교하는 것으로, 에너지의 증가한 정도와 감소한 정도를 상대값을 이용하여 비교하는 틀이다. 위 그림이 바로 구간 운동에서의 상대값 비교 틀이다.
문항에서 구간이라고 이름 붙힌 것들에만 적용되는 것이 아닌, 물체가 이동하는 동안 에너지 변화량을 비교해야 할 필요가 있는 모든 경우에 쓸 수 있는 것이다.
변화량 비교를 할 때는 중요한 것이 하나 있다. 물체의 속도의 증감, 높이변화를 눈으로 확인하여 **위/아래 화살표를 꼭 표시**해 주는 것이다. 이는 나중에 역학적 에너지 보존이 바로바로 보이는지와 연결되므로 필수적으로 표시하는 게 좋다.

이 두 가지 틀 대신 운동 에너지와 중력 퍼텐셜 에너지를 순서쌍을 쓰듯이 (E, 2E)처럼 쓰는 게 더 편하다고 생각하는 학생들이 있을 수 있다. 그게 지금은 더 편할지 몰라도, 시험장에서는 그렇게 표시하게 된다면 꼭 보여야 할 것들이 잘 보이지 않을 수 있다.

꼭 보여야 하는 것 중 가장 중요한 것이 앞서 p.##에서 배운 ‘연직 방향 운동에서의 가속도와 에너지 변화량 비율 사이 관계’이다.



연직 방향으로 운동하는 물체의 운동 에너지 변화량과 중력 퍼텐셜 에너지 변화량을 각각 틀에 써넣어 보자. 두 변화량 값 사이에 가로선 하나를 쭉 그어 주면, 분수 $\frac{\Delta E_k}{\Delta E_p}$의 형태가 바로 시각적으로 드러나게 된다. 이 분수값에 g를 곱해 주면 가속도가 된다.

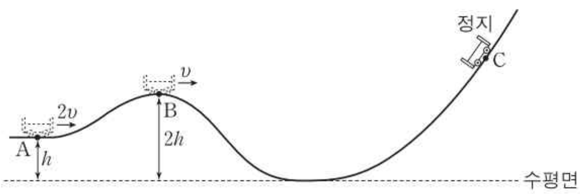
비율 호환의 문제

에너지 상대값 문항에서, 자주 맞닥뜨리게 될 장애물이다.
상대값은 결국 비율 관계를 통한 비교인데, 이 비교를 세 개 이상의 에너지 값/변화량에 대해서는 한 번에 머리로 계산이 힘든 경우가 있다.

다음 문항을 통해 이렇게 비율이 맞지 않는 경우의 해결 방법을 알아보자.

2014학년도 9월 모평 7번

그림은 높이가 h인 A점에서 속력 $2v$로 운동하던 수레가 B점을 지나 최고점 C에 도달하여 정지한 순간의 모습을 나타낸 것이다. B에서 수레의 속력은 v이고 높이는 $2h$이다. (단, 수레는 동일 연직면 상에서 궤도를 따라 운동하고, 수레의 크기와 마찰, 공기 저항은 무시한다.)



최고점 C의 높이는? (단, 수레는 동일 연직면 상에서 궤도를 따라 운동하고, 수레의 크기와 마찰, 공기 저항은 무시한다.) [3점]

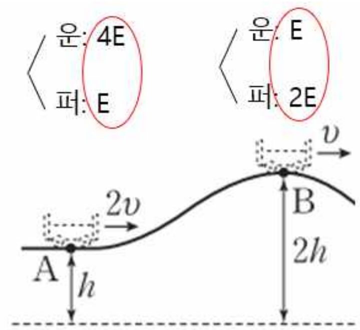
① $\frac{7}{3}h$ ② $\frac{8}{3}h$ ③ $3h$ ④ $\frac{10}{3}h$ ⑤ $\frac{11}{3}h$

해설 1

문제를 보니 A지점과 B지점의 높이 비율, A지점과 B지점, 그리고 C지점에서의 속도 비율이 주어져 있으므로, 지점에서의 에너지 상대값을 비교해야 하는 문항임을 직감할 수 있다.

그러면 우리는 즉시 지점에서의 상대값 비교 틀을 그려서 에너지 값을 비교할 준비를 해야 한다.

퍼텐셜 에너지의 기준선이 수평면(점선)이라고 할 때, 두 지점 A와 B에서의 에너지 상대값 틀을 완성시켜 보자.



지점 A와 B에서의 운동에너지의 비율은 4 : 1이며, 퍼텐셜 에너지의 비율은 1 : 2이다. 그렇다고 해서 바로 위 그림처럼 채워 넣었더니 문제가 발생한다.

두 지점 A, B사이의 운동에너지끼리, 중력 퍼텐셜 에너지끼리는 비율 관계가 성립하지만, 표시된 동그라미 내에서는 비율 관계가 성립하지 않기 때문이다.
이를 한마디로 요약하면 비율 관계가 네 개의 에너지 값들 사이에 완벽히 호환되지 않는 상태라 할 수 있다.
이를 완벽히 호환되는 상태로 고치려면 어떻게 해야 할까?

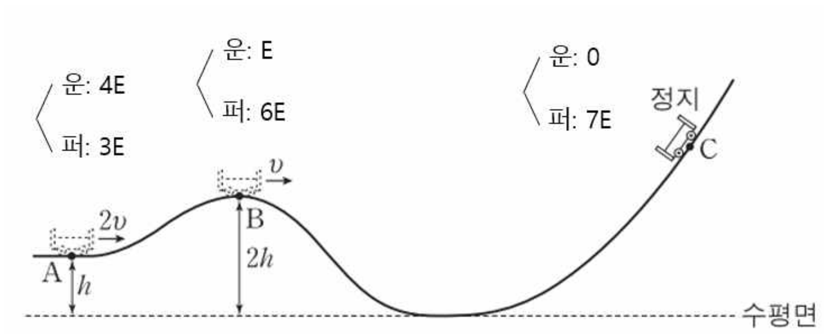
우리가 아직 쓰지 않은 숨겨진 조건이 하나 있다. 바로 역학적 에너지 보존이다.
A~B사이 운동에서는 비보존력이 작용하지 않으므로 역학적 에너지가 보존되는 상황이다.
역학적 에너지 보존을 통해 '증가한 에너지의 크기와 감소한 에너지의 크기가 같으면 전체 에너지 총량이 보존된다'는 것을 알 수 있다.

증가한 에너지는 중력 퍼텐셜 에너지이고, 감소한 에너지는 운동에너지이다. 따라서, 지점 A와 B에서의 중력 퍼텐셜 에너지 차이와 운동에너지 차이는 크기가 같다.

이를 이용하여, 비율 관계에서도, 차이의 크기를 일치시켜 주면 간단히 해결된다.
운동에너지 비인 4 : 1에서의 차이값인 3과, 중력 퍼텐셜 에너지비인 1 : 2에서의 차이값인 1을 같게 만들기 위해서는 중력 퍼텐셜 에너지비에서의 차이값 1에 숫자 3을 곱하면 된다. 중력 퍼텐셜 에너지비는 그럼 3 : 6으로 쓸 수 있고, 이제 A지점과 B지점에서의 네개의 에너지 상대값 비율이 모두 호환되는 상태가 된다.

	A : B		A : B
운동 에너지 비	4 : 1 (차이=3)	→	4 : 1 (차이=3)
중력 퍼텐셜 에너지 비	1 : 2 (차이=1)		3 : 6 (차이=3)

앞서 구한 비율을 바탕으로 세 지점 A, B, C에 대해서 에너지 상대값 틀을 완성시켜 보면 아래와 같다.



세 지점의 중력 퍼텐셜 에너지 비율과 높이 비율을 보면,

$3E : 6E : 7E = h : 2h : \frac{7}{3}h$이므로

C의 높이는 $\frac{7}{3}h$이다.