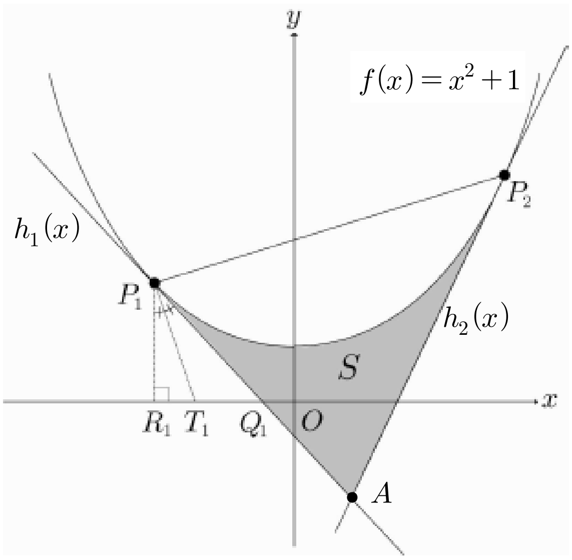
한권으로 완성하는 수학 - 적분과 통계(상) 181p~ 발췌본

2010 연세대학교 수리논술
2010 고려대학교 수리논술
2011 연세대학교 수리논술
2011 고려대학교 수리논술

1. 심층분석
2. 답안 작성 방법
3. 실전 답안지

22

①-1. Comprehension



주어진 함수를 $f(x)=x^2+1$ 라 하고,

$P_1(a_1,\ a_1^2+1)$에서 접선의 방정식을 $h_1(x)$,

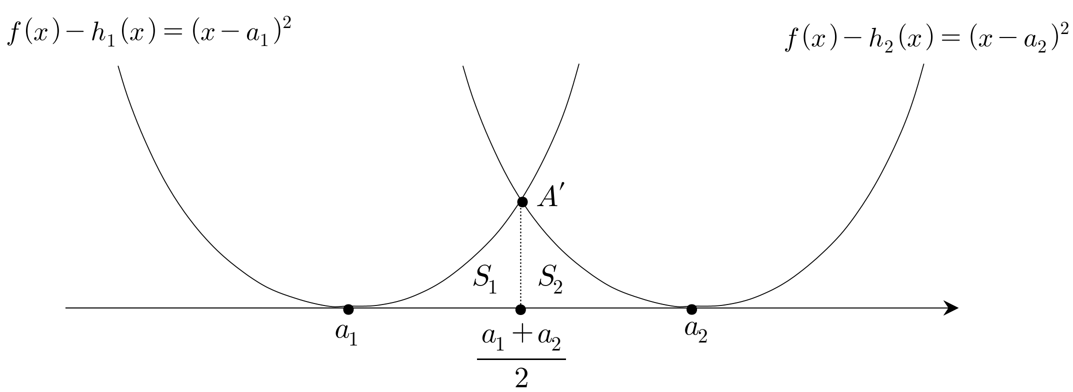
$P_2(a_2,\ a_2^2+1)$에서 접선의 방정식을 $h_2(x)$라 하자.

$f(x)-h_1(x)$의 그래프와 $f(x)-h_2(x)$를 같은 평면좌표 위에 그린 후, 두 함수의 교점 A'의 x좌표를 찾아보자.

$(x-a_1)^2=(x-a_2)^2$이므로,

$x-a_1=a_2-x\ \ (\because a_1\neq a_2)$이다.

따라서 $x=\dfrac{a_1+a_2}{2}$가 된다.



(A의 x좌표)=(A'의 x좌표) 이고, 주어진 두 함수의 모양이 같고 각각 $x=a_1$, $x=a_2$ 대칭이므로 $S_1=S_2$

따라서 $S=2\int_{a_1}^{\frac{a_1+a_2}{2}}\{f(x)-h_1(x)\}dx=2\int_{a_1}^{\frac{a_1+a_2}{2}}(x-a_1)^2dx=2\int_0^{\frac{a_2-a_1}{2}}x^2dx$ ($\because$ 평행이동과 정적분)

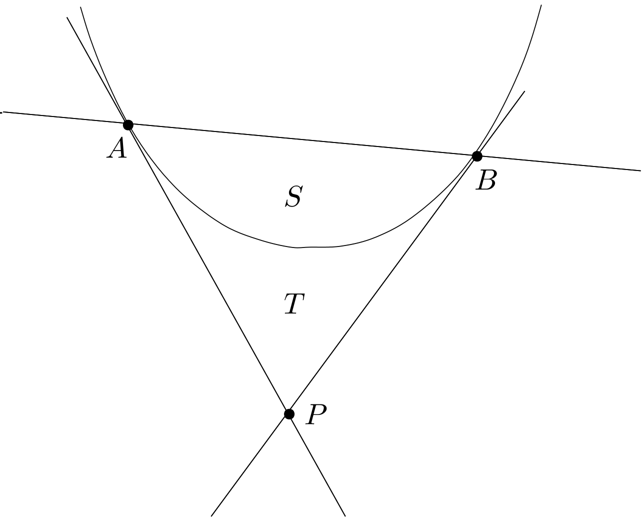
$=2\left(\frac{a_2-a_1}{2}\right)\int_0^1\left\{\left(\frac{a_2-a_1}{2}\right)x\right\}^2dx$ ($\because$ 치환 적분)$=2\left(\frac{a_2-a_1}{2}\right)^3\int_0^1 x^2dx=2\left(\frac{a_2-a_1}{2}\right)^3\times\frac{1}{3}=$

$\frac{1}{12}(a_2-a_1)^3$

①-2. Point

point 1

포물선의 대표적인 두 가지 성질이 출제되어서 포물선을 깊게 공부해본 학생이라면 쉽게 풀 수 있었다.



평소에 이차곡선의 여러가지 성질을 접해보고 증명을 해본다면 논술에 많은 도움이 될 것이다. 공식을 외우는 것 보다 증명을 해보는 것이 중요하다.

포물선 성질 1

포물선 위의 서로 다른 두 점 A, B가 있고, A에서의 접선과 B에서의 접선 두 접선이 있을 때

$$(\text{두 접선의 교점 } P\text{의 } x\text{좌표}) = \left(\frac{A\text{의 } x\text{좌표}+B\text{의 } x\text{좌표}}{2}\right)$$

포물선 성질 2

두 접선과 포물선 사이에 만들어진 도형의 넓이 T와 직선 AB와 포물선 사이에 만들어진 도형의 넓이 S에 대하여

$$S:T=2:1$$

point 2

정적분을 할 때, 단순히 정적분을 하기보다 "평행이동과 정적분" "치환적분"을 적절히 활용해서 적분을 하면 계산량을 많이 줄일 수 있다.

$\int_a^b f(x)dx$를 0에서 1까지 정적분으로 고치는 연습을 해보면 된다.

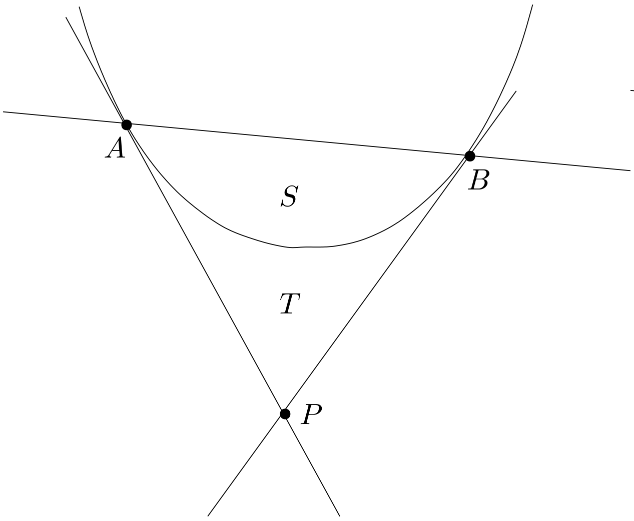
일단, 평행이동을 이용해서 아래끝을 0으로 고친다. $\int_a^b f(x)dx=\int_0^{b-a}f(x+a)dx$

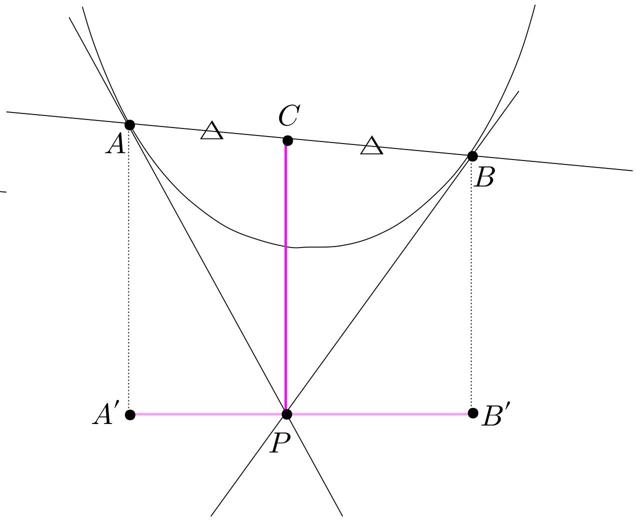
이제 $b-a$를 1로 바꾸어야 하는데 $x=(b-a)t$로 치환하면 1로 바뀌게 된다.

$\int_0^{b-a}f(x+a)dx=(b-a)\int_0^1 f((b-a)t+a)dt=(b-a)\int_0^1 f((b-a)x+a)dx$ (t보다는 편의상 x로 하겠다.) 이렇 해서 $\int_a^b f(x)dx$를 0에서 1까지 정적분으로 고쳤다.

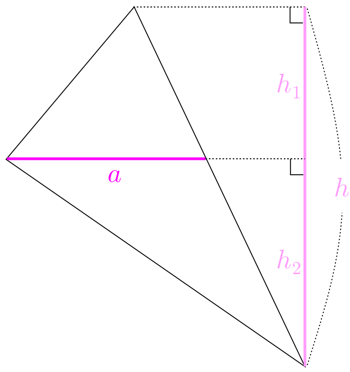
이처럼 적분 구간을 조절하면 더 깔끔하고 멋진 답안이 나올 수 있다.

point 3





삼각형 APB에서 넓이 S를 빼도 넓이 T를 찾을 수 있다.
삼각형의 넓이를 찾기 전에 삼각형 넓이를 찾는 방법을 한 가지 배워보자.



그림에서 붉은색 선 위에 있는 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}ah_1$ 붉은색 선 아래에 있는 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}ah_2$ 이므로, 삼각형의 넓이

$S=\frac{1}{2}ah_1+\frac{1}{2}ah_2=\frac{1}{2}a(h_1+h_2)=\frac{1}{2}ah$ 가 된다.

점 A에서의 접선의 방정식 : $y=2a_1(x-a_1)+a_1^2+1$
점 B에서의 접선의 방정식 : $y=2a_2(x-a_2)+a_2^2+1$
연립해서 점 P의 좌표를 찾으면 $P\left(\frac{a_1+a_2}{2},\ a_1a_2+1\right)$, 또 선분 AB의 중점 C의 y좌표는 $\frac{a_1^2+a_2^2}{2}+1$이다.
따라서 $\overline{PC}=\frac{(a_2-a_1)^2}{2}$, $\overline{A'B'}=a_2-a_1$이다.
삼각형 APB의 넓이$=\frac{1}{2}\times\overline{PC}\times\overline{A'B'}=\frac{1}{4}(a_2-a_1)^3=S+T$

넓이 $S=\left|\int_{a_1}^{a_2}(x-a_1)(x-a_2)dx\right|=\left|\int_0^{a_2-a_1}x(x+a_1-a_2)dx\right|$ ($\because$ 평행이동과 정적분)

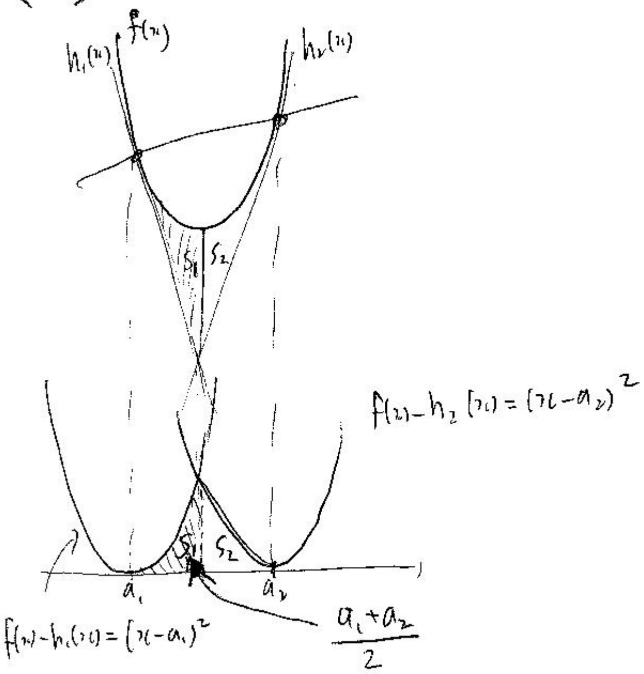
$=\left|(a_2-a_1)\int_0^1(a_2-a_1)x\{(a_2-a_1)x-(a_2-a_1)\}dx\right|=\left|(a_2-a_1)^3\int_0^1 x(x-1)dx\right|=$ ($\because$ 치환 적분)

$\left|(a_2-a_1)^3\int_0^1(x^2-x)dx\right|=\left|\frac{1}{6}(a_2-a_1)^3\right|=\frac{1}{6}(a_2-a_1)^3$ ($\because\ a_2>a_1$)

$\therefore\ T=\frac{1}{4}(a_2-a_1)^3-\frac{1}{6}(a_2-a_1)^3=\frac{1}{12}(a_2-a_1)^3$

①-3. Actual Fight

<a>



$$(x-a_1)^2=(x-a_2)^2$$

$$x-a_1=a_2-x \quad (\because a_1 \neq a_2)$$

$$x=\frac{a_1+a_2}{2}$$

$\therefore$ $S_1=S_2$ 이므로 구하는 넓이 $S=2\int_{a_1}^{\frac{a_1+a_2}{2}}(x-a_1)^2\,dx$

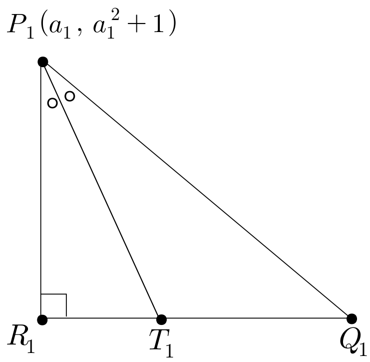
$$=2\int_0^{\frac{a_2-a_1}{2}}x^2\,dx \quad (\because \text{평행이동}) = 2\left(\frac{a_2-a_1}{2}\right)\int_0^1\left\{\left(\frac{a_2-a_1}{2}\right)x\right\}^2dx$$

(∵ 치환 적분)

$$=2\left(\frac{a_2-a_1}{2}\right)^3\int_0^1 x^2\,dx=\frac{1}{12}(a_2-a_1)^3$$

그래프나 그림을 많이 그려가면서 서술하는 것이 논리적인 답안 작성에 매우 도움이 된다.

②-1. Comprehension



직선 P_1Q_1의 기울기는 $2a_1$이므로 x좌표가 1증가할 동안 y좌표가 $2a_1$ 변 화 . 따라서 $\overline{R_1Q_1}:\overline{P_1R_1}=1:-2a_1\ (a_1<0)$이 된다.

피타고라스 정리를 사용하면 $\overline{P_1R_1}:\overline{P_1Q_1}=-2a_1:\sqrt{4a_1^2+1}$ 임을 알 수 있다. 각의 이등분선의 성질에 의해 $\overline{P_1R_1}:\overline{P_1Q_1}=\overline{R_1T_1}:\overline{T_1Q_1}$ 이므로

$$\overrightarrow{OT_1}=\frac{(-2a_1)\overrightarrow{OQ_1}+\sqrt{4a_1^2+1}\ \overrightarrow{OR_1}}{-2a_1+\sqrt{4a_1^2+1}}$$ 이 된다.

직선 P_1Q_1의 방정식은 $y=2a_1(x-a_1)+a_1^2+1$이므로 x절편 Q_1은 $\left(\dfrac{a_1^2-1}{2a_1},\ 0\right)$이 된다.

$$\overrightarrow{OT_1}=\frac{(-2a_1)\times\left(\dfrac{a_1^2-1}{2a_1},\ 0\right)+\sqrt{4a_1^2+1}\times(a_1,\ 0)}{-2a_1+\sqrt{4a_1^2+1}}=\left(\frac{-a_1^2+1+a_1\sqrt{4a_1^2+1}}{-2a_1+\sqrt{4a_1^2+1}},\ 0\right)$$

$\therefore$ T_1의 x좌표$=\dfrac{-a_1^2+1+a_1\sqrt{4a_1^2+1}}{-2a_1+\sqrt{4a_1^2+1}}$

②-2. Point

point 1

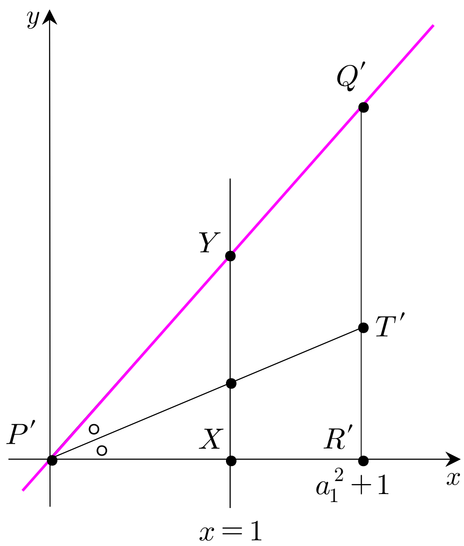
각의 이등분선의 정리를 사용하는 간단한 문제인데, 벡터를 활용하라고 논제에 제시되어 있다. 사실 벡터라는 것이 어차피 점의 좌표이므로 크게 신경쓰지 말고 내분점을 찾으면 정답이 나온다. 그런데 계산이 복잡해서 중간에 포기한 학생이 많았을 것이다. 기울기 $2a_1$을 잘 활용해서 비율을 찾는 것이 문제의 핵심이다.

point 2

벡터를 주도적으로 활용하기 위해 조금 다르게 풀어 보겠다.

주어진 도형을 시계 반대방향으로 90° 회전해서 점 P_1을 원점이 되도록 옮기면 직선 $P'Q'$는 직선 P_1Q_1과 수직이므로 방정식이 $y=\left(-\dfrac{1}{2a_1}\right)x$ 가 되고

$Q'=\left(a_1^2+1,\ -\dfrac{a_1^2+1}{2a_1}\right)$ 여기서 각의 이등 직선인 $\overleftrightarrow{P'T'}$를 찾아보자. $\overrightarrow{P'R'}+\overrightarrow{P'Q'}$는 평행사변형에 의해서 각의이등분 벡터가 나오지 않는다. 두 벡터를 더할 때 두 벡터의 크기가 똑같다면 더했을 때 마름모가 그려지므로 각의 이등분 벡터가 나오게 된다.



즉, $\overrightarrow{P'R'}+\overrightarrow{P'Q'}$이 아닌 $\dfrac{\overrightarrow{P'R'}}{|\overrightarrow{P'R'}|}+\dfrac{\overrightarrow{P'Q'}}{|\overrightarrow{P'Q'}|}$을 구하면 된다.

$$\frac{\overrightarrow{P'R'}}{|\overrightarrow{P'R'}|}+\frac{\overrightarrow{P'Q'}}{|\overrightarrow{P'Q'}|}=\frac{\overrightarrow{P'X}}{|\overrightarrow{P'X}|}+\frac{\overrightarrow{P'Y}}{|\overrightarrow{P'Y}|}=(1,\ 0)+\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{4a_1^2}}}\left(1,\ -\frac{1}{2a_1}\right)$$

$=(1,\ 0)+\dfrac{2a_1}{-\sqrt{4a_1^2+1}}\left(1,\ -\dfrac{1}{2a_1}\right)=\left(\dfrac{2a_1}{-\sqrt{4a_1^2+1}}+1,\ \dfrac{1}{\sqrt{4a_1^2+1}}\right)$이다. 이 벡터의 y성분을 x성분으로 나누면 각의 이등분선의 기울기가 나온다.

각의 이등분 직선 $\overleftrightarrow{P'T'}$의 기울기$=\dfrac{1}{-2a_1+\sqrt{4a_1^2+1}}$ 즉, 방정식은 $y=\left(\dfrac{1}{-2a_1+\sqrt{4a_1^2+1}}\right)x$이다.

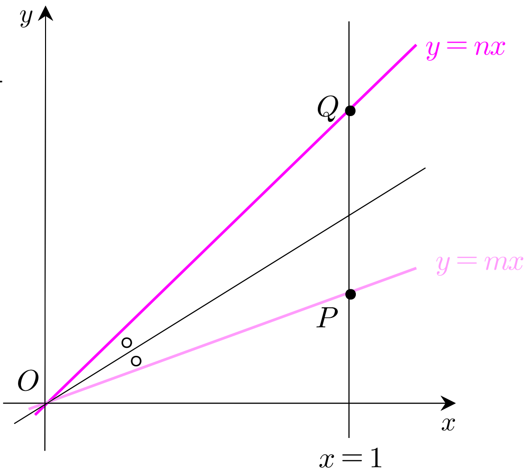
직선의 방정식에 a_1^2+1을 대입해서 T'의 y좌표를 찾으면 $\dfrac{a_1^2+1}{-2a_1+\sqrt{4a_1^2+1}}$이다.

따라서 $\overline{R'T'}=\dfrac{a_1^2+1}{\sqrt{4a_1^2+1}-2a_1}=\overline{R_1T_1}$이다. 따라서 T_1의 x좌표는 $a_1+\dfrac{a_1^2+1}{\sqrt{4a_1^2+1}-2a_1}$

point 3

각의 이등분선을 찾는 좋은 방법을 배워보자.

$P(1,\, m)$, $Q(1,\, n)$에 대하여 $\dfrac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|}+\dfrac{\overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OQ}|}$이 각의 이등분 벡터가 된다.



$$\frac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|}+\frac{\overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OQ}|}=\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}(1,\, m)+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}(1,\, n)$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{m^2+1}},\ \frac{m}{\sqrt{m^2+1}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}},\ \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+1}},\ \frac{m}{\sqrt{m^2+1}}+\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\right)$$

따라서 각의이등분 직선의 기울기는

$$\frac{\dfrac{m}{\sqrt{m^2+1}}+\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}}{\dfrac{1}{\sqrt{m^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}}=\frac{m\sqrt{n^2+1}+n\sqrt{m^2+1}}{\sqrt{m^2+1}+\sqrt{n^2+1}}$$

이 된다.

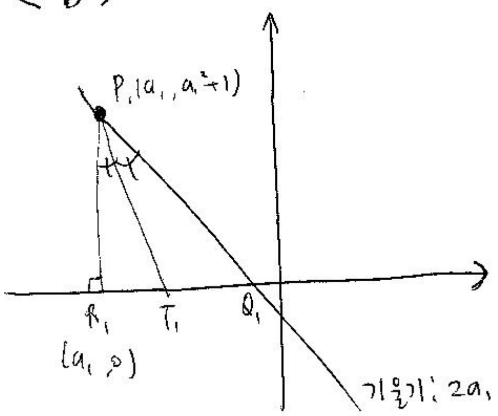
즉 각의 이등분 직선의 방정식은 $y=\left(\dfrac{m\sqrt{n^2+1}+n\sqrt{m^2+1}}{\sqrt{m^2+1}+\sqrt{n^2+1}}\right)x$ 가 된다.

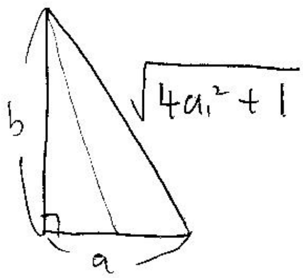
특히, $m=0$일 때 $y=\left(\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}+1}\right)x$ 이 된다. 여기서, $n=-\dfrac{1}{2a_1}$이라 하면 주어진 논제가 되겠다.

이처럼 각의 이등분 직선을 찾을 때 점과 직선사이의 거리를 활용해도 되지만 각의 이등분 벡터를 활용해도 된다. 공간좌표 상의 각의 이등분 평면 찾을 때도 법선벡터의 이등분 벡터를 활용해 보길 바란다.

②-3. Actual Fight

< b >





기울기가 $2a_1$ 이므로

$a : b = 1 : -2a_1$ ($\because a_1 < 0$)

$\therefore$ 각의 이등분선의 성질에 따라 $\overline{R_1T_1} : \overline{T_1Q_1} = -2a_1 : \sqrt{4a_1^2+1}$

직선 P_1Q_1의 방정식: $y = 2a_1(x-a_1) + a_1^2+1 = 2a_1x - a_1^2+1$

x 절편을 찾아 보면 $2a_1x - a_1^2+1 = 0$ 에서

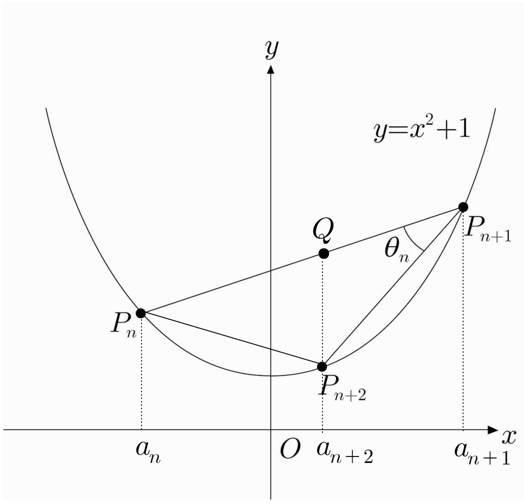
$$x = \frac{a_1^2-1}{2a_1} \rightarrow Q\left(\frac{a_1^2-1}{2a_1}, 0\right)$$

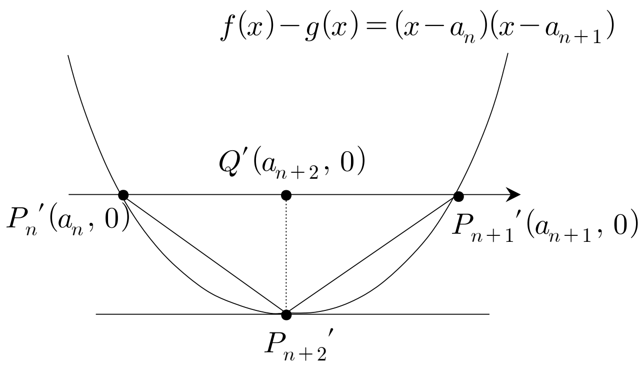
$$\overrightarrow{OT_1} = \frac{-2a_1\overrightarrow{OQ_1} + \sqrt{4a_1^2+1}\,\overrightarrow{OR_1}}{-2a_1 + \sqrt{4a_1^2+1}} = \left(\frac{-2a_1 \cdot \frac{a_1^2-1}{2a_1} + a_1\sqrt{4a_1^2+1}}{-2a_1 + \sqrt{4a_1^2+1}}, 0\right)$$

$$= \left(\frac{1-a_1^2+a_1\sqrt{4a_1^2+1}}{-2a_1+\sqrt{4a_1^2+1}}, 0\right) = T_1\text{의 } x\text{좌표.}$$

시험장에서는, 시험장에서 주는 연습장에 계산을 하고, 답안지에는 계산과정을 많이 생략해도 된다.

③-1. Comprehension





직선 P_nP_{n+1}의 방정식을 $g(x)$라 하고 $f(x)=x^2+1$라 하자.

$f(x)-g(x)$의 그래프를 그려보면 오른쪽 그림과 같이 되는데, 도함수는 $f'(x)-g'(x)$이므로

$f'(x)-g'(x)=0$을 만족하는 $x=a_{n+2}$가 된다. 그런데 $f(x)-g(x)$은 이차함수 이므로 두 실근 a_n, a_{n+1}의

중점에서 접선의 기울기가 0, $f'(x)-g'(x)=0$ 이다. 따라서 $a_{n+2}=\dfrac{a_n+a_{n+1}}{2}$가 된다.

또한 (삼각형 $P_nP_{n+2}Q$의 넓이) = (삼각형 $P_n'P_{n+2}'Q'$의 넓이) (밑변과 높이가 동일) 이고

(삼각형 $QP_{n+2}P_{n+1}$의 넓이) = (삼각형 $Q'P_{n+2}'P_{n+1}'$의 넓이) (밑변과 높이가 동일) 이므로

(삼각형 $P_nP_{n+2}P_{n+1}$의 넓이) = (삼각형 $P_n'P_{n+2}'P_{n+1}'$의 넓이) 이다.

$$\overline{Q'P_{n+2}'}=|f(a_{n+2})-g(a_{n+2})|=\left|\left(\frac{a_n+a_{n+1}}{2}-a_n\right)\left(\frac{a_n+a_{n+1}}{2}-a_{n+1}\right)\right|=\frac{(a_{n+1}-a_n)^2}{4}$$

$\overline{P_n'P_{n+1}'}=|a_{n+1}-a_n|$이므로 삼각형 $P_n'P_{n+2}'P_{n+1}'$의

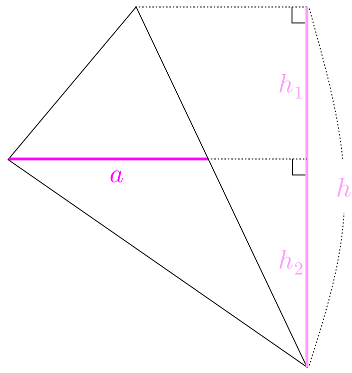
넓이$=\dfrac{1}{2}\times\overline{Q'P_{n+1}'}\times\overline{P_n'P_{n+1}'}=\dfrac{1}{8}|a_{n+1}-a_n|^3$ 또한,

$a_{n+2}=\dfrac{a_n+a_{n+1}}{2}$에서 $(a_{n+2}-a_{n+1})=-\dfrac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)$이므로, $a_{n+1}-a_n=(a_2-a_1)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ 이다.

$\therefore$ 삼각형의 넓이$=\left(\dfrac{1}{8}\right)^n(a_2-a_1)^3$ ($\because$ $a_2-a_1>0$)

③-2. Point

point 1



삼각형 넓이를 구하는 방법 중 하나인 이 내용이 또 사용되었다.

그림에서 빨간 선 위에 있는 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}ah_1$

빨간 선 아래에 있는 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}ah_2$ 이므로,

삼각형의 넓이 $S=\frac{1}{2}ah_1+\frac{1}{2}ah_2=\frac{1}{2}a(h_1+h_2)=\frac{1}{2}ah$ 가 된다.

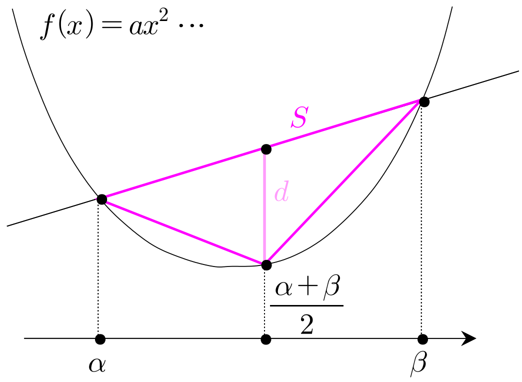
수리가형에서도 가끔 활용되니 꼭 알아두도록 하자.

point 2

평소에 다꿑은 공식을 증명해 봤다면 상당히 도움 되었을 것이다.

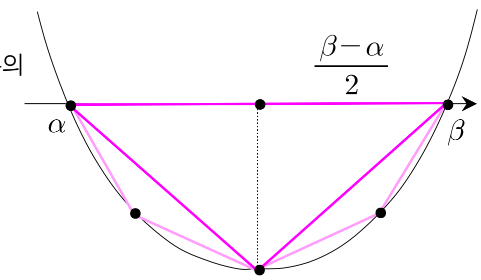
이차함수와 일차함수 사이의 최대길이: $d=\frac{a}{4}(\beta-\alpha)^2$

이차함수 내부의 삼각형 넓이의 최댓값: $S=\frac{a}{8}(\beta-\alpha)^3$



외우지 말고 평소에 증명을 해보면 논술에 도움이 된다.

위의 사실을 알고 있다는 가정 하에 이차함수와 일차함수 사이의 넓이 공식 $\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$을 정적분 하지 않고 증명해보 . (지학사 자습서에 있는 내용인데, 이 내용이 논술에 거의 그대로 출제 된 것이다.)



빨간색 삼각형 넓이 + 분홍색 삼각형 넓이 2개 + ... 이렇게 급수의 합을 구하면 $f(x)$와 x축 사이의 넓이가 나온다.

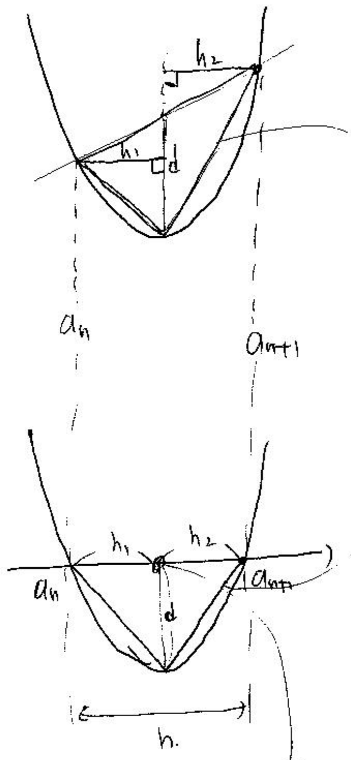
빨간색 삼각형의 넓이$=\frac{a}{8}(\beta-\alpha)^3$ (초항) 이다.

그런데 파란색 삼각형은 x좌표의 차이가 $\frac{1}{2}$로 작아지므로 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{8}$배가 된다. $\left(\because S=\frac{a}{8}(\beta-\alpha)^3\right)$ 그런데, 삼각형의 개수가 2배로 늘어나므로 공비는 $\frac{1}{4}$이 된다.

무한등비급수 공식에 따라 넓이 $\dfrac{\frac{a}{8}(\beta-\alpha)^3}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}\times\frac{a}{8}(\beta-\alpha)^3=\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$

③-3. Actual Fight

(C)



→ 삼각형의 넓이 $= \frac{1}{2} d (h_1 + h_2)$

‖ 두 넓이가 같다.

→ 삼각형의 넓이 $= \frac{1}{2} d (h_1 + h_2) = \frac{1}{2} dh$

$f'(x) - g'(x) = 0$

$f'(x) = g'(x)$ 인 점 이므로 $\frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ 이다.

$\frac{a_n + a_{n+1}}{2} = a_{n+2}$ → $2a_{n+2} - a_n - a_{n+1} = 0$ 이므로

$(a_{n+2} - a_{n+1}) = \left(-\frac{1}{2}\right)(a_{n+1} - a_n)$

즉, $a_{n+1} - a_n = (a_2 - a_1)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdots$ ①

$f(x) - g(x) = (x - a_n)(x - a_{n+1})$

$$d = \left| f\left(\frac{a_n + a_{n+1}}{2}\right) - g\left(\frac{a_n + a_{n+1}}{2}\right) \right| = -\left(\frac{a_{n+1} - a_n}{2}\right)\left(\frac{a_n - a_{n+1}}{2}\right) = \frac{1}{4}(a_{n+1} - a_n)^2$$

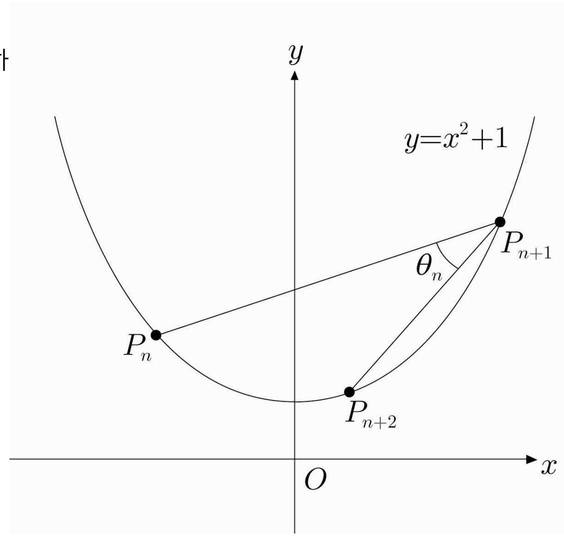
∴ 삼각형 넓이 $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}(a_{n+1} - a_n)^2 \cdot |a_{n+1} - a_n|$

$$= \frac{1}{8}|a_{n+1} - a_n|^3 = \frac{1}{8}(a_2 - a_1)^3 \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^3\right\}^{n-1}$$

$$= (a_2 - a_1)^3 \left(\frac{1}{8}\right)^n$$

수리논술 문제 마다 조금씩 다르겠지만 실제 답안지에 한글을 많이 적을 필요가 없다.

④-1. Comprehension



직선 P_nP_{n+1}과 x축의 양의방향과 이루는 각을 α_n이라 하면 $\tan\alpha_n$이 직선의 기울기와 똑같으므로

$\tan\alpha_n = \dfrac{{a_{n+1}}^2 - {a_n}^2}{a_{n+1} - a_n} = a_{n+1} + a_n = 2a_{n+2}$이다.

$\left(\because\ a_{n+2} = \dfrac{a_n + a_{n+1}}{2}\right)$

그림에서 보듯이 $\alpha_2 > \alpha_1$, $\alpha_3 < \alpha_2$ ... 이렇게

수열 α_n은 증가, 감소를 반복하므로 절댓값을 활용해서

$\theta_n = |\alpha_{n+1} - \alpha_n|$이 된다.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\tan\theta_n}{a_{n+1}-a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\tan|a_{n+1}-a_n|}{a_{n+1}-a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\tan(a_{n+1}-a_n)}{a_{n+1}-a_n}\right|$$

$(\because |\tan(a_{n+1}-a_n)| = |-\tan(a_n - a_{n+1})|)$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(\dfrac{\tan a_{n+1} - \tan a_n}{1+\tan a_n \tan a_{n+1}}\right)}{a_{n+1}-a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left\{\dfrac{2(a_{n+3}-a_{n+2})}{1+4a_{n+2}\times a_{n+3}}\right\}}{a_{n+1}-a_n}\right| =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|2\left(\frac{a_{n+3}-a_{n+2}}{a_{n+1}-a_n}\right)\times\left(\frac{1}{1+4a_{n+2}\times a_{n+3}}\right)\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{1+4a_{n+2}\times a_{n+3}}\right)\right| = \frac{1}{2+8a^2}$$

$(\because (a_{n+2} - a_{n+1}) = -\dfrac{1}{2}(a_{n+1} - a_n)$ 에서 $(a_{n+3} - a_{n+2}) = \dfrac{1}{4}(a_{n+1} - a_n)$이므로 $\dfrac{a_{n+3}-a_{n+2}}{a_{n+1}-a_n} = \dfrac{1}{4})$

④-2. Point

point 1

평소에 두 직선 사이의각 → 탄젠트 덧셈정리 라고 기계적으로 공부했다면 쉽게 발상할 수 있던 문제였다.
수능에서도 자주 쓰이는 발상이니 필수적으로 익혀두자.

point 2

탄젠트가 기함수임을 이용해서 $|\tan(a_{n+1} - a_n)| = |-\tan(a_n - a_{n+1})|$ 을 얻을 수 있었고

수열 α_n이 증가수열이 아니라서 $\theta_n = |\alpha_{n+1} - \alpha_n|$이 되는 등

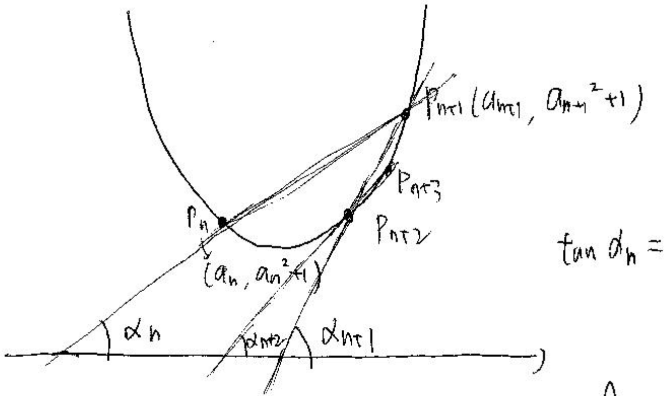
양수인지 음수인지에 주의를 기울여서 풀어야 한다.

point 3

④ 논제를 푸는데 $2a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$이 사용된다. 이와 같이 수리영역의 합답형 문제에서 ㄱ,ㄴ 으로 ㄷ을 풀듯이, 앞 문제를 이용해서 다음 문제를 풀 수 있는 논술이 여러 대학에서 출제되고 있으니 앞 문제를 의식하면서 다음문제를 풀도록 해야 한다. 2011 고려대 수리논술의 경우 논제에 '②를 이용해서' 라고 언급 해주었지만 2010 고려대 수리논술에서는 언급해 주지 않았다.

④-3. Actual Fight

<d>



$$\tan\alpha_n = \frac{a_{n+1}^2 - a_n^2}{a_{n+1} - a_n} = a_n + a_{n+1} = 2a_{n+2}$$

$$\left(\because \frac{a_n + a_{n+1}}{2} = a_{n+2}\right)$$

$$\theta_n = |\alpha_{n+1} - \alpha_n|$$

($\because \alpha_n$은 증가, 감소를 반복)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\tan\theta_n}{a_{n+1} - a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\tan|\alpha_{n+1} - \alpha_n|}{a_{n+1} - a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\tan(\alpha_{n+1} - \alpha_n)}{a_{n+1} - a_n}\right|$$

$$\left(\because |\tan(\alpha_{n+1} - \alpha_n)| = |\tan(\alpha_n - \alpha_{n+1})|\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(\frac{\tan a_{n+1} - \tan a_n}{1 + \tan a_n \tan a_{n+1}}\right)}{a_{n+1} - a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2(a_{n+3} - a_{n+2})}{(a_{n+1} - a_n)(1 + 4a_{n+2}a_{n+3})}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{1 + 4a_{n+2}a_{n+3}}\right)\right| = \frac{1}{2 + 8a^2}$$

$$\left(\because (a_{n+2} - a_{n+1}) = -\frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n) \text{ 이므로 } \frac{a_{n+3} - a_{n+2}}{a_{n+1} - a_n} = \frac{1}{4}\right)$$

23

①-1. Comprehension

공간상의 평면도형 $S(t)$의 법선벡터를 $\vec{h}$라 하고

xy평면으로의 정사영인 $A(t)$의 법선벡터를 $\vec{a}$라 하고 $\vec{h}$와 $\vec{a}$이 이루는 각을 α

yz평면으로의 정사영인 $B(t)$의 법선벡터를 $\vec{b}$라 하고 $\vec{h}$와 $\vec{b}$이 이루는 각을 β

zx평면으로의 정사영인 $C(t)$의 법선벡터를 $\vec{c}$라 하고 $\vec{h}$와 $\vec{c}$이 이루는 각을 γ 라 하면

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$이 된다. 또한

$A(t)=S(t)\cos\alpha$, $B(t)=S(t)\cos\beta$, $C(t)=S(t)\cos\gamma$ 이므로

$\{A(t)\}^2+\{B(t)\}^2+\{C(t)\}^2=\{S(t)\}^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)=\{S(t)\}^2$

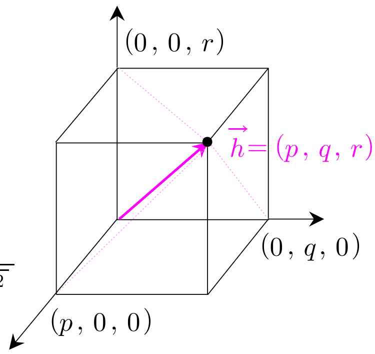
$(\because\ \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1)$ $\therefore$ $\{A(t)\}^2+\{B(t)\}^2+\{C(t)\}^2=\{S(t)\}^2$

$\vec{h}$와 x축이 이루는 각을 α

$\vec{h}$와 y축이 이루는 각을 β

$\vec{h}$와 z축이 이루는 각을 γ

라 할 때,



$\cos\alpha=\dfrac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$, $\cos\beta=\dfrac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$, $\cos\gamma=\dfrac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$

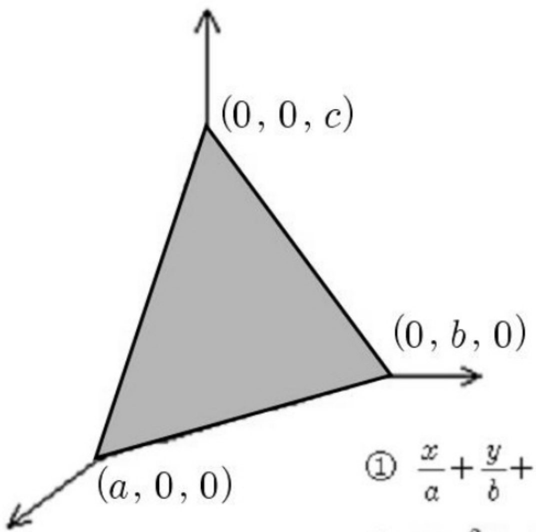
$\therefore\ \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ $\cdots$ 1

①-2. Point

point 1

비교적 쉬운 문제였는데 방 향 증명해 봤다면 쉽게 증명할 수 있었다.

방향코사인 외에 다음과 같이 평면도형에서의 성질을 증명한 다음 공간상의 평면도형 $S(t)$를 무수히 많은 삼각형으로 나눈 다음 각각에 대해 다음 공식을 적용시켜서 답 안 쓴 사람도 많았다. (마치 구분구적을 하듯이) 하지만, 엄밀성이 떨어져 방향코사인에 비해 좋은 점수를 받지 못했을 것이다



① $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$

② $S_{xy}{}^2+S_{yz}{}^2+S_{zx}{}^2=S^2$

point 2

이 문제에서 방향코사인을 꼭 증명했어야 하는지에 대한 논란이 조금 있었는데, 즉 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ 이 공식을 그냥 모두가 알고 있는 정의쯤으로 사용해도 되냐는 문제이다. 수 리 [illegible]것이 모든 것을 세세히 하나하나 증명해야 되는 것은 아니지만 ①문제를 다시 한 번 보면 방향코사인을 증명하는 것이 더 좋은 선택인 것 같다. 왜냐하면 방향코사인 외에 딱히 학생의 실력을 검증할 요소가 보이지 않고

① 갑은 을에게 $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$를 각각 알려 주었다. 을은 이 정보만으로 도형 F의 넓이 $S(t)$를 알아내었다. 을의 해결 방법을 설명하고, $S(t)$와 $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ 사이의 관계식을 구하시오.

논제에서 보듯이 "을의 해결 방법을 설명하고" 라고 되 어 방향코사인을 증명하는 것이 옳다. 또한, 증명할지 말지 고민하느니 증명을 하는 것이 좋다 왜냐하면 증명하지 않으면 감점될 수 있지만 증명 한다고 감점되는 것은 아니기 때문이다.

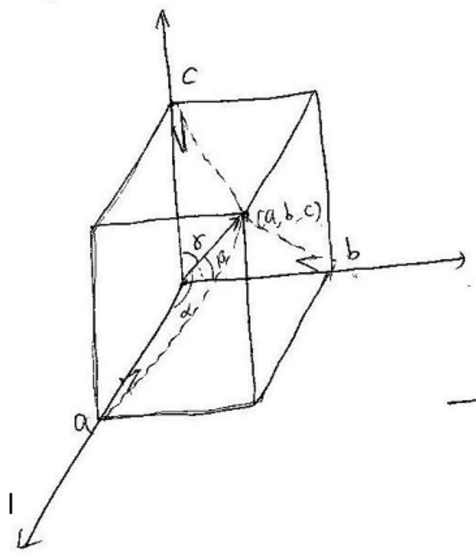
point 3

① 갑은 을에게 $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$를 각각 알려 주었다. 을은 이 정보만으로 도형 F의 넓이 $S(t)$를 알아내었다. 을의 해결 방법을 설명하고, $S(t)$와 $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ 사이의 관계식을 구하시오.

① 문제는 한 문제 이지만 그 안에 2개의 문제가 있다. 시험현장에서 당황하게 되면 묻는 두 가지를 정확하게 답하지 않고, 마지막 문제만 푼다거나 하는 일이 생긴다. 논술 시험을 칠 때, 하나하나 묻는 것에 각각 줄을 치고 묻는 것 모두에 답하도록 노력해야 한다.

①-3. Actual Fight

<1-1>

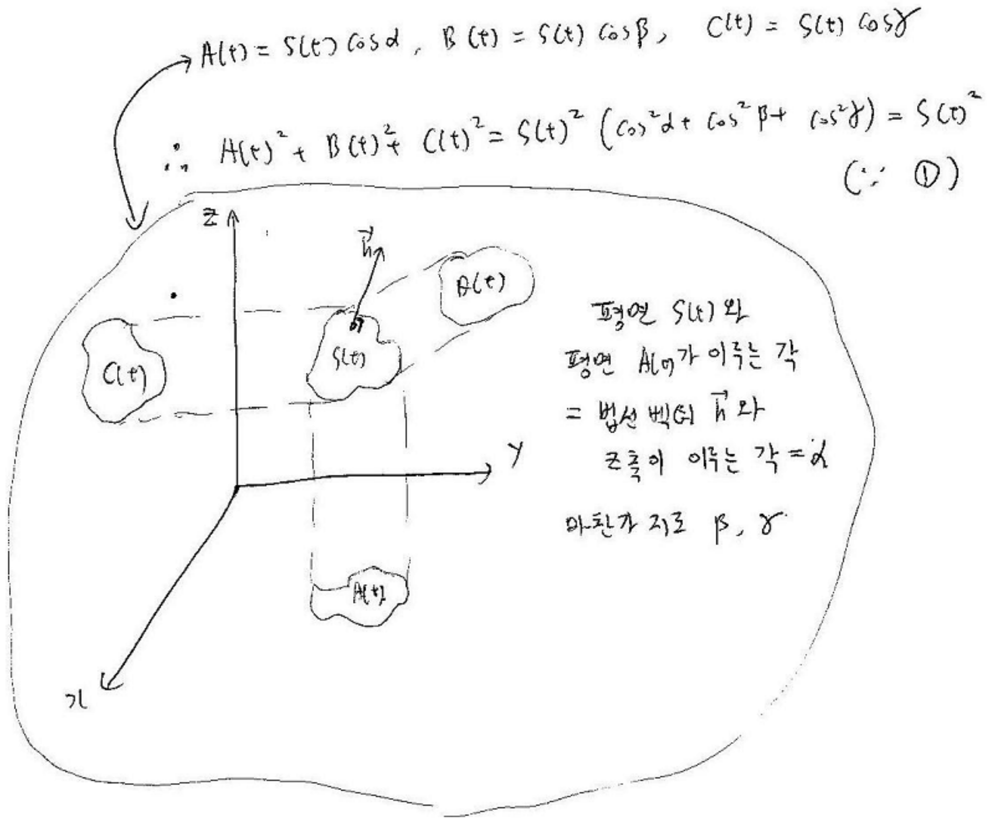


$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\rightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \cdots ①$$



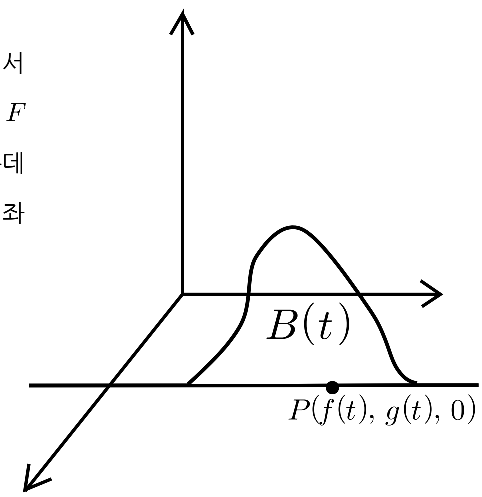
자세한 해설에서는 설명을 위해 많은 글이 들어갔지만 실전에서는 이정도 서술이면 제대로 된 점수를 받을 수 있다. 사진에서 보듯이 (…㉠), (…①), (∴), (∵) 등의 기호를 적절히 활용하면, 매우 깔끔하게 서술 할 수 있다.

②-1. Comprehension

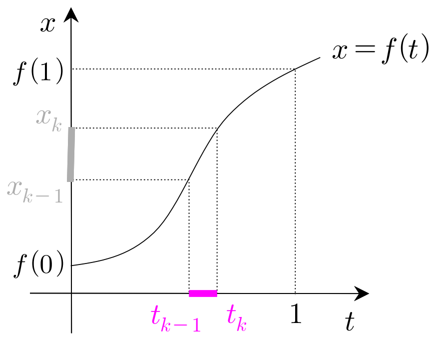
$A(t)=C(t)=0$이라는 것을 해석해야 하는데 xy평면, zx평면으로의 정사영한 넓이가 없다는 것이다. 그렇다면 평면도형 $S(t)$는 yz평면에 평행한 평면이라는 것을 의미하게 되고 $S(t)=B(t)$가 된다. 또한 평면도형 F 위에 $P(f(t),\, g(t),\, 0)$이라는 점이 항상 존재하므로 xy평면과 도형 F는 항상 만나는 상태이다. 이 상황을 공간좌표에 그림으로 그려보면 오른쪽 그림과 같이 된다.

여기서 시각 t가 0에서 1로 증가함에 따라 x좌표 또한 $f(0)$에서 $f(1)$까지 점점 증가해 간다. ($\because f(t)$는 증가함수) 그렇다면 도형 F가 점점 x축의 양의방향으로 이동하면서 입체도형을 만들게 되는데 그 도형을 x축에 평행한 평면으로 잘라서 $f(0)$에서 $f(1)$까지의 x좌표를 n등분 했을 때, k번째 나타나는 도형의 부피를 써보면 $B\{f^{-1}(x_k)\}(x_k - x_{k-1})$이 된다.

($\because$ $x=f(t)$는 일대일대응)



또한 다음 그림에서 보듯이 x좌표가 n"등"분 되었으므로 t좌표에서 0에서 1까지 등분되지 않았다. 등분은 아니지만 (만약 $f(t)$가 일차 함수면 등분이 된다) k번째 x좌표에 대응되는 t좌표를 t_k라고 약속하자.



이제 $B\{f^{-1}(x_k)\}(x_k - x_{k-1})$을 다음과 같이

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} B\{f^{-1}(x_k)\}(x_k - x_{k-1})$ 무한급수로 쓰면 정적분을 할 수 있게 된다. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} B\{t_k\}\{f(t_k)-f(t_{k-1})\} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} B\{t_k\}\left\{\frac{f(t_k)-f(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}\right\}(t_k - t_{k-1})$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} B\{t_k\}\{f'(c)\}(t_k - t_{k-1}) = \int_0^1 B(t)f'(t)dt$$

(단, $t_{k-1} < c < t_k$, 여기서 평균값의 정리가 쓰이므로 $f(t)$는 미분가능 해야 한다.)

또한 정적분 $\int_0^1 B(t)f'(t)dt$이 정의되기 위해서 $B(t)f'(t)$이 연속이여야 한데,

$B(t)$는 연속이므로 도함수 $f'(t)$가 연속이면 곱한 함수 $B(t)f'(t)$또한 연속이 된다.

②-2. Point

point 1

② 갑은 을에게 시각 $t(0 \leqq t \leqq 1)$에서 $B(t)$와 $A(t) = C(t) = 0$임을 알 려 . 또한, 도형 F 위에 항상 존재하는 점 P의 좌표 $P(f(t), g(t), 0)$도 알려 주었다. 그리고 $f(t)$와 $g(t)$는 구간 $0 \leqq t \leqq 1$에서 증가함수이고, 미분 가능하며, 또한 이들의 도함수가 연속이라는 조건을 주었다. 을은 $t=0$에서 $t=1$까지 도형 F가 만든 입체도형의 부피를 정적분으로 표현할 수 있었다. 그 이유를 설명하고, 입체도형의 부피를 적분변수 t를 사용한 정적분으로 나타내시오.

논제를 보면 정적분으로 표현할 수 있는 이유를 설명하라고 되어 있는데

$\int_{f(0)}^{f(1)} B(f^{-1}(x))dt$에서 $f^{-1}(x) = t$로 치환하면서 $f^{-1}(x) = t \iff x = f(t)$를 이용해서

$dx = f'(t)dt$ 를 이끌어내고 적분구간을 변경하면 $\int_0^1 B(t)f'(t)dt$이 된다. 라고 설명되어 있는 경우가 많은데, 이 문제는 이런 스킬을 검증하려는 문제가 아니다.

위와 같이 풀게 되면 정적분으로 표시할 수 있는 이유가 명백하지 않다.
또한, $dx = f'(t)dt$ 라는 식은 수학에서 올바르게 정의되는 식이 아니다.
(앞으로도 논술 문제를 풀 때 dx, dy등을 따로 쓰지 않길 바란다.)
이 문제는 이렇게 간단한 치환적분 문제가 아니고 매우 어려운 "초고난도" 문제이다.

1. Comprehension을 참 ② 문제를 완벽하게 이해하길 바란다.
$f(t)$가 증가함수인 이유 - 역함수의 존재성 : 하나의 x값에 대해 하나의 t값이 대응된다.
$f(t)$가 미분가능해야 하는 이유 - 평균값의 정리

$f(t)$가 도함수가 연속인 이유 - 정적분이 정의되기 위해서 : 교과과정에서 정적분은 연속함수에서 정의한다. 다음과 같이 “이유”를 모두 서술해야 완벽한 점수를 받을 수 있을 것이다.

교과과정에서 정적분은 연속함수에서 정의한다. - 교과과정에서의 이유 설명

$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$을 증명하고 그것으로 부터 $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$을 증명하는데

$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dx = f(x)$을 증명할 때 교과서에 있는 “최대 • 최소의 정리”가 쓰인다.

최대 • 최소의 정리는 연속인 구간에서만 사용할 수 있으므로 정적분을 할 때 주어진 함수가 연속이여야 한다.

→ $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dx = f(x)$은 반드시 증명해봐야 한다. 논술에 언제든지 나올 수 있는 매우 중요한 주제이다.

point 2

사실 이 문제는 교과과정을 조금 벗어났다. 그 이유는 x가 등분되면서 t가 등분되지 않았으므로 $t_k - t_{k-1}$이 일정하지 않게 된다. 그런데도 정적분으로 쓸 수 있다.

즉, 등분이 되지 않더라도 조각 개수가 양의 무한대로 가게 되면 정상적으로 정적분 값이 나오게 된다.

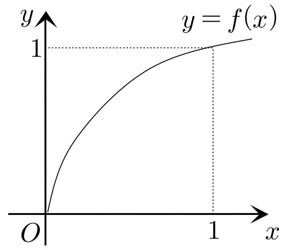
(사실, 더 자세한 엄밀한 조건이 있지만 고교과정에서는 전혀 알 필요가 없고 논술에 나온다면 제시문이 주어질 것이다.)

등분이 아닌 문제는 예전 2005수능 문제에도 나온 적이 있는데 그 문제를 소개하겠다.

오른쪽 그림은 연속함수 $y=f(x)$의 그래프이다. 구간 $[0,\,1]$에서 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가 존재하고 연속일 때, 극한값

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{g\left(\frac{k}{n}\right)-g\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}\frac{k}{n}$$

와 같은 값을 갖는 것은? [2005]



① $\int_0^1 g(x)dx$ ② $\int_0^1 xg(x)dx$ ③ $\int_0^1 f(x)dx$ ④ $\int_0^1 xf(x)dx$ ⑤ $\int_0^1 \{f(x)-g(x)\}dx$

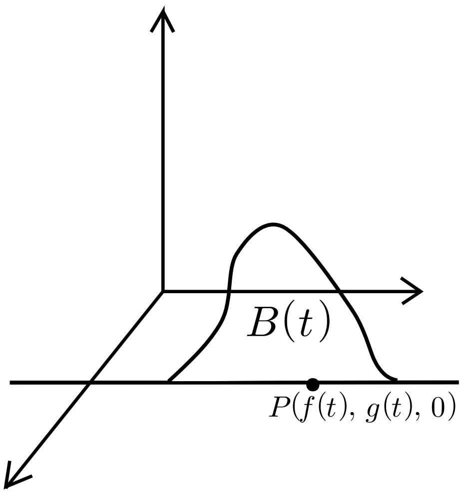
다음과 같은 문제인데 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수 이므로 $\frac{k}{n}$는 y축을 n등분한 후 k번째 y좌표라고 하는 것이 맞다. 이 문제에서도 $y=f(x)$는 곡선이므로 y좌표는 등분이지만 그에 대응되는 x좌표는 등분이 아니게 된다. 다음 문제를 풀어보면,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{g\left(\frac{k}{n}\right)-g\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}\frac{k}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\{g(y_k)-g(y_{k-1})\}y_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\{x_k-x_{k-1}\}f(x_k)=\int_0^1 f(x)dx$$

여기서도 마찬가지로 x좌표가 등분이 아니므로 $x_k - x_{k-1}$이 일정한 값이 아니게 된다.

하지만, 정적분 값은 올바로 나온다. 즉, 정적분을 할 때 좌표를 꼭 “등”분 할 필요는 없다.

point 3



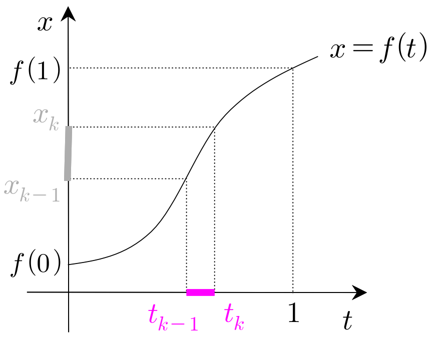
다음에서

x좌표를 $f(0)$에서 $f(1)$까지 등분 했는데

꼭 등분할 필요가 없다는 것을 알았다.

여기서 t좌표를 등분해서

x좌표가 등분이 아니도록 한 후에 풀어보면,



이 그림에서 t좌표를 n “등”분 해보자. 그런데 t는 0에서 1까지

움직이므로 정확하게 $t_k = \dfrac{k}{n}$, $t_{k-1} = \dfrac{k-1}{n}$이 된다.

그런 다음 k번째 피를 써보면

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} B\left(\frac{k}{n}\right)\left\{f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} B\left(\frac{k}{n}\right)\left\{\frac{f\left(\frac{k}{n}\right)-f\left(\frac{k-1}{n}\right)}{\frac{k}{n}-\frac{k-1}{n}}\right\}\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} B\left(\frac{k}{n}\right)\{f'(c)\}\frac{1}{n}$$

$= \displaystyle\int_0^1 B(t)f'(t)dt$ (단, $\dfrac{k-1}{n} < c < \dfrac{k}{n}$, 여기서 평균값의 정리가 쓰이므로 $f(t)$는 미분가능)

수능 문제 대부분이 0에서 1까지를 정적분 구간으로 다루고 있는데

다음문제도 사실 t입장에서 0에서 1까지를 정적분 구간으로 다루고 있는 문제이다

즉, $t_k = \dfrac{k}{n}$가 되는 문제였다. 논술에서 적분문제가 보였을 때, 0에서 1까지 움직이는 변수가 있다면 바로 n등분 해버리면 멋지게 풀릴 수도 있다는 것을 명심해야한다.

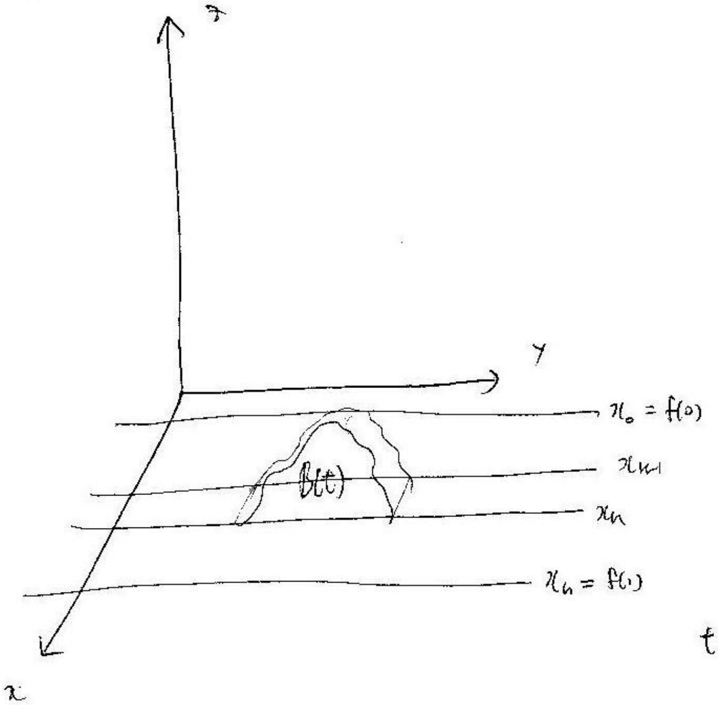
이렇게 ② 문제의 해설을 마친다.

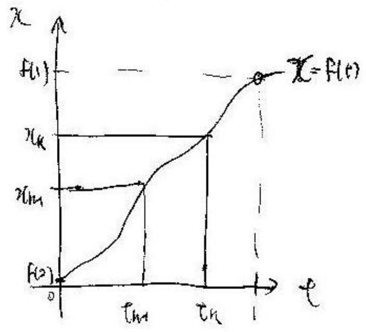
엄청나게 어렵고, 얻을 수 있는 것이 엄청나게 많은 문제다.

완벽하게 이해하고, 또 완벽하게 공부하길 바란다.

②-3. Actual Fight

<1-2>





t좌표를 0에서 1까지 n등분하고

$f(t_k) = x_k$ 라 하자.

여기서, $f(t)$가 증가 함수이므로 $(x_k - x_{k-1}) > 0$ 이고

$f(t)$가 연속 함수 이므로 $B(t_k)(x_k - x_{k-1})$은 k번째 도형의 부피가 된다. $\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} B(t_k)(x_k - x_{k-1})$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} B(t_k)\left\{\frac{f(t_k)-f(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}\right\}(t_k - t_{k-1})$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} B(t_k)\left\{f'(c)\right\}(t_k - t_{k-1})$$

(단, $t_{k-1} < c < t_k$, $f(x)$는 미분가능)

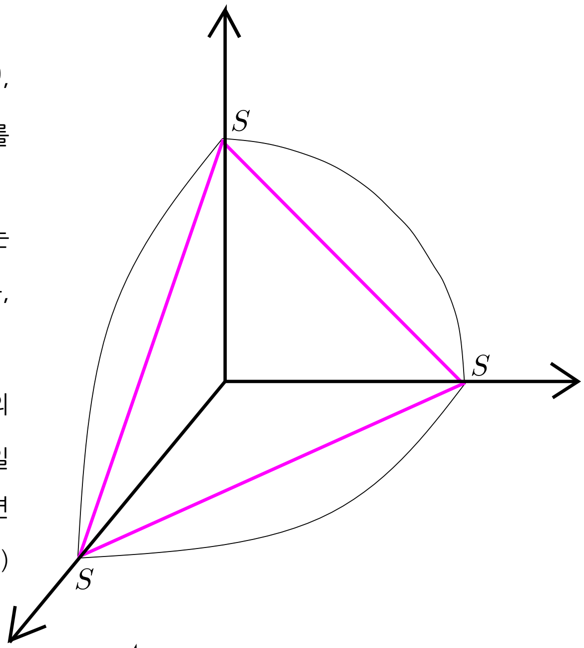
$$= \int_0^1 B(t)f'(t)\,dt$$

$f'(t)$가 연속이므로 $B(t)f'(t)$가 연속이다.

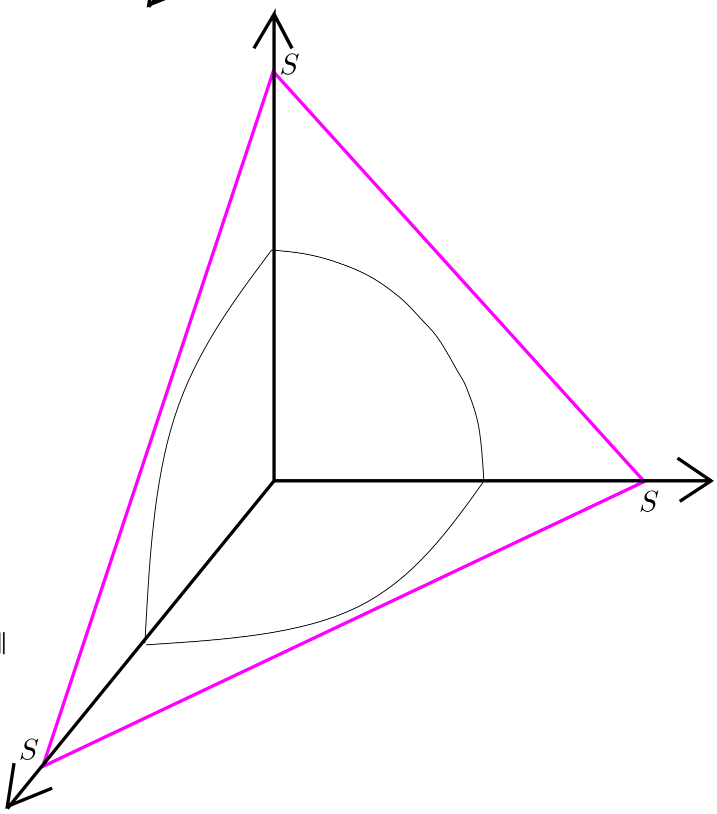
$\therefore$ 정적분 가능

③-1. Comprehension

을은 $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ 각각에 대해서는 알지 못하고 그 합한 함수인 $G(t)=A(t)+B(t)+C(t)$을 알고 있다. 여기서 제곱의 합 $\{A(t)\}^2+\{B(t)\}^2+\{C(t)\}^2=\{S(t)\}^2$으로 일정하다는 사실을 ①에서 증명했다. 합한 함수 $G(t)=A(t)+B(t)+C(t)$의 최댓값과 최솟값의 관계식을 구해야 하는데, 편의상 $A(t)=x$, $B(t)=y$, $C(t)=z$, $S(t)=S$ 라 하면 $x^2+y^2+z^2=S^2$일 때, $x+y+z$의 최댓값, 최솟값을 구하는 문제와 똑같다고 할 수 있다.



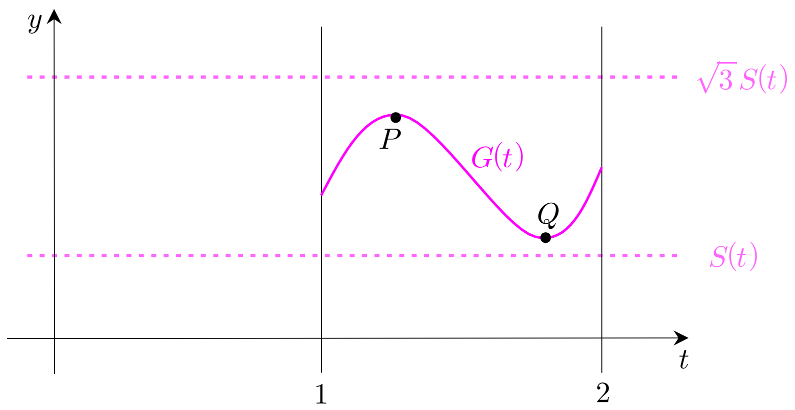
여기서 $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ 이므로 $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$에서 구의 일부분 $x^2+y^2+z^2=S^2$ 의 그래프를 그려보면 다음과 같이 된다.
여기서 $x+y+z=k$ 라 하면 k의 최댓값, 최솟값을 찾는 문제가 된다. 그런데 k는 평면 $x+y+z=k$ 이 x축, y축, z축과 만나는 점을 의미하게 된다.
즉 도형 $x^2+y^2+z^2=S^2$과 만나면서 x축과 만나는 점의 x좌표가 제일 클 때 그 값이 곧 최댓값이고 x좌표가 제일 작을 때 그 값이 곧 최솟값이 된다. 그림에서 보듯이 평면 $x+y+z=k$이 $(S, 0, 0)$을 지날 때 (빨간 삼각형 일 때) 절편이 제일 작으므로 k의 최솟값은 S 다.



또한
$x+y+z=k$이 구에 접할 때,
절편이 가장 커지게 된다. 따라서
점과 평면사이의 거리 공식을 써보면
$\frac{|-k|}{\sqrt{3}}=S$ 이 된다. 여기서
$x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ 이므로 $k=\sqrt{3}\,S$
이다.

즉, $G(t)=A(t)+B(t)+C(t)$ 에서
$S(t) \leq A(t)+B(t)+C(t) \leq \sqrt{3}\,S(t)$가
된다. 따라서 최댓값 M 과 최솟값 m 의 관계식은 $M=\sqrt{3}\,m$이 되게 된다.

이제, 관계식 $M=\sqrt{3}\,m$을 이용해서 상수 $S(t)$를 찾아야 한다. $G(t)=A(t)+B(t)+C(t)\ge 0$에서 $S(t)\le G(t)\le \sqrt{3}\,S(t)$가 되는데, $y=G(t)$라 하고 그 그래프를 그려보자.



만약 $y=G(t)$의 그래프가 위와 같이 되었을 때,

점 Q의 y좌표를 최솟값 q라 하고, 점 P의 y좌표를 최댓값 p라 하면 $p<\sqrt{3}\,q$가 되므로 최댓값이 최솟값의 $\sqrt{3}$배가 아니게 된다.

따라서 최댓값이 최솟값의 $\sqrt{3}$배가 되려면 반드 최솟값은 $S(t)$, 최댓값은 $\sqrt{3}\,S(t)$가 되어야 한다. 즉, $G(t)$의 최댓값이 최솟값의 $\sqrt{3}$배가 될 때, 그 최솟값이 곧 $S(t)$가 된다.

③-2. Point

point 1

구와 평면의 위치관계가 아닌 다른 방법으로 문제를 풀어보겠다.

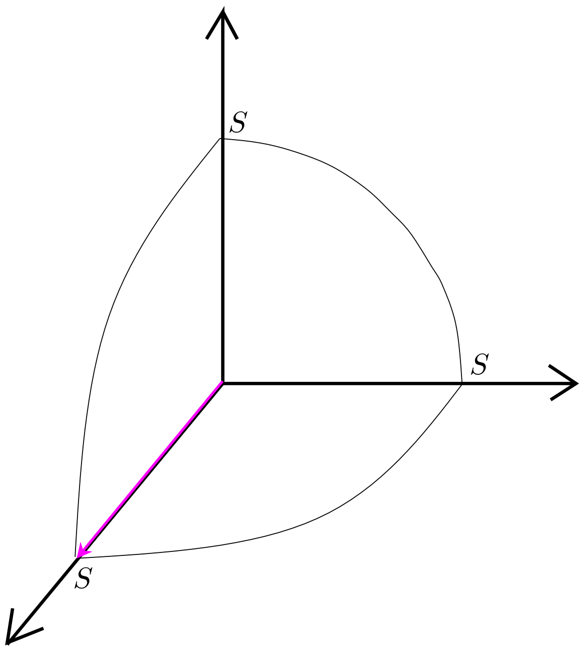
$x^2+y^2+z^2=S^2$ $(x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0)$일 때, $x+y+z$의 최댓값, 최솟값을 구하는 문제라 할 수 있는데 $x+y+z$을 $(x,\ y,\ z)\bullet(1,\ 1,\ 1)$으로 해석 할 수 있다. (벡터의 내적)

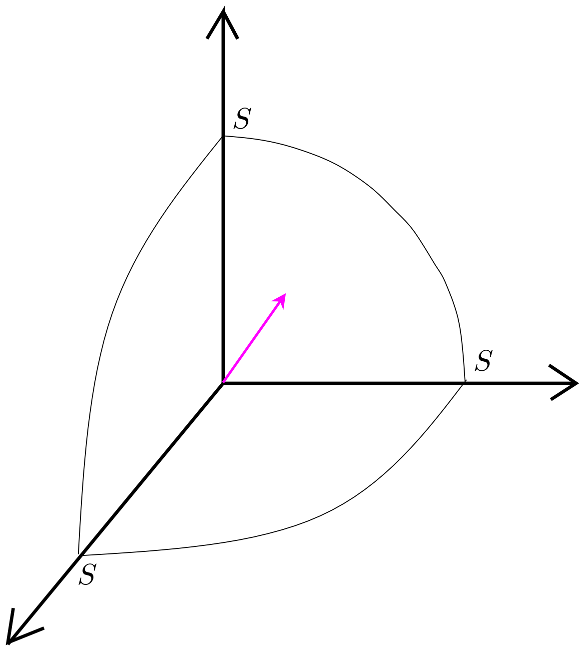
$(x,\ y,\ z)$은 구 $x^2+y^2+z^2=S^2$위의 점이므로 크기가 일정하고 방향은 움직인다

$(1,\ 1,\ 1)$은 고정된 점이므로 크기와 방향 모두 일정하다.

$\therefore\ x+y+z=(x,\ y,\ z)\bullet(1,\ 1,\ 1)=S\sqrt{3}\cos\theta$ 이다. (단, θ는 두 벡터 $(x,\ y,\ z)$, $(1,\ 1,\ 1)$이 이루는 각)

여기서 $\cos\theta$는 θ가 예각인 구간에서 감소함수이므로 θ가 최대일 때 최솟값을 가지θ가 최소일 때 최댓값을 가지게 된다.





벡터 $(x,\ y,\ z)$가 첫 번째 그림과 같이 $(S,\ 0,\ 0)$일 때 $(1,\ 1,\ 1)$과 이루는 각이 가장 커지게 되므로 이 순간에 최솟값을 가지게 되고 ($(0,\ S,\ 0)$, $(0,\ 0,\ S)$ 일 때도 마찬가지로 최솟값을 가진다) 그 최솟값은 $x+y+z=S$ 가 된다.

두 번째 그림과 같이 $x=y=z=\dfrac{S}{\sqrt{3}}$일 때, $(1,\ 1,\ 1)$과 이루는 각이 $(\theta=0)$으로 가장 작아지게 되므로

최댓값은 $x+y+z=\sqrt{3}\,S$ 가 된다.

$\therefore\ \ S \le x+y+z \le \sqrt{3}\,S$

point 2

일차식과 이차식이 주어졌으므로 코시-슈바르츠 부등식으로 문제를 해결할 수도 있다.

코시-슈바르츠 부등식을 사용해보자.

$x^2+y^2+z^2=\qquad S^2\ (x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0)$일 때, $x+y+z$의 최댓값, 최솟값을 구하는 문제인데,

$(x^2+y^2+z^2)(1^2+1^2+1^2)\ge(x+y+z)^2$

$3S^2\ge(x+y+z)^2$ 이므로 $-\sqrt{3}\,S\le x+y+z\le\sqrt{3}\,S$ 이 된다.

여기서 $(x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0)$ 이고

$G(t)^2=(x+y+z)^2\geqq x^2+y^2+z^2=S^2$이므로 최종적인 부등식

$S\le x+y+z\le\sqrt{3}\,S$을 유도해낼 수 있다.

하지만, 코시-슈바르츠 부등식으로 유도하려면, 최솟값인 S를 유도 하는 것이 상당히 어려워지므로 공간도형에서의 구를 이용한 유도방법이 가장 좋다고 할 수 있다.

③-3. Actual Fight

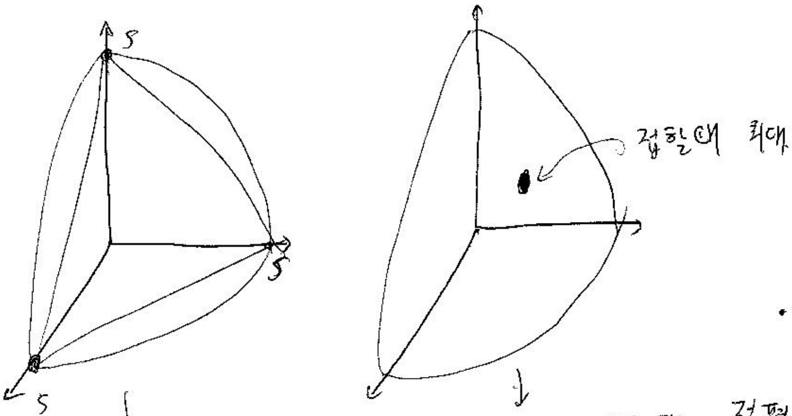
〈1-3〉

$A(t)+B(t)+C(t)=G(t)$

$A(t)^2+B(t)^2+C(t)^2=S(t)^2 \quad (A(t)\geq 0,\ B(t)\geq 0,\ C(t)\geq 0)$

$x^2+y^2+z^2=S^2$ 일 때 $x+y+z$의 최소, 최대

$(x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0)$



↓ 절편 $k=S$일때가 최소이다.

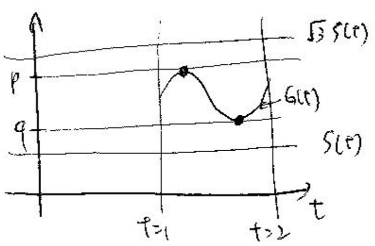
↓ 평면에 접할 때 절편 k가 최대이므로, $x=y=z$ 일때

$3x^2=S^2 \rightarrow x=y=z=\frac{S}{\sqrt{3}}$

최댓값 $=\frac{3}{\sqrt{3}}S=\sqrt{3}S$

$\therefore S(t)\leq A(t)+B(t)+C(t)\leq \sqrt{3}S(t)$

$0\leq S(t)\leq G(t)\leq \sqrt{3}S(t)$



그림에서 $p<\sqrt{3}q$ 이므로

$1\leq t\leq 2$ 에서 $G(t)$의 최댓값이 최솟값의 $\sqrt{3}$배가 되어야만 최솟값이 $S(t)$, 최댓값이 $\sqrt{3}S(t)$가 되게 된다. $\therefore$ {$G(t)$의 최댓값} $=\sqrt{3}\times$ {$G(t)$의 최솟값} 일 때 {$G(t)$의 최솟값} $=S(t)$이므로 $S(t)$를 구할 수 있다.

논제를 자세하게 읽고, 묻는 것 모두에 줄을 치도록 하자. 그래야 다음과 같이 본론을 놓치지 않고 서술할 수 있다. $S(t)$를 찾는 과정이 상당히 어려웠다. 많이 반복해보고 복습해서 완전히 자신의 것으로 만들도록 하자.